

ĐẠI HỌC QUỐC GIA THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

NGUYỄN THÀNH NAM

VỀ TẬP IDEAN NGUYÊN TỔ LIÊN KẾT VÀ MÔĐUN ĐỐI
ĐỒNG ĐIỀU ĐỊA PHƯƠNG SUY RỘNG THEO MỘT CẶP
IDEAN

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

TP. HỒ CHÍ MINH - 2020

ĐẠI HỌC QUỐC GIA THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

NGUYỄN THÀNH NAM

VỀ TẬP IDEAN NGUYÊN TỔ LIÊN KẾT VÀ MÔĐUN ĐỐI
ĐỒNG ĐIỀU ĐỊA PHƯƠNG SUY RỘNG THEO MỘT CẶP
IDEAN

Ngành: Đại số và Lý thuyết số

Mã số ngành: 62 46 01 04

Mã số ngành mới: 9 46 01 04

Phản biện 1:

Phản biện 2:

Phản biện 3:

Phản biện độc lập 1:

Phản biện độc lập 2:

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC

1. PGS. TS. TRẦN TUẤN NAM

2. TS. NGUYỄN VIỆT ĐÔNG

TP. HỒ CHÍ MINH - 2020

Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan rằng: Các kết quả được trình bày trong luận án là của tôi dưới sự hướng dẫn của nhóm tác giả hướng dẫn. Những kết quả được tôi trình bày trong luận án này là những kết quả đã được gửi và được chấp nhận đăng ở các tạp chí khoa học trong danh mục ISI như [47] và [62], tạp chí chuyên ngành có uy tín trong nước như [46]. Tôi xin cam các kết quả được đưa vào luận án viết chung với các tác giả khác đã được sự nhất trí của các thầy hướng dẫn và các đồng tác giả, các thành viên trong nhóm nghiên cứu. Đây cũng là những kết quả hoàn toàn mới và chưa từng được ai công bố trong bất kì công trình nghiên cứu khoa học nào khác trong nước cũng như quốc tế.

Tác giả

Lời cảm ơn

Lời đầu tiên tôi xin chân thành cảm ơn thầy PGS. TS. Trần Tuấn Nam, người đã dành mọi tâm huyết để hướng dẫn, định hướng và chỉ bảo tôi trong suốt quá trình làm học tập và nghiên cứu. Thầy đã dẫn dắt tôi trong suốt quá trình học tập, nghiên cứu và giúp đưa ra những ý tưởng, định hướng cụ thể, phương pháp giải quyết các vấn đề để tôi thực hiện. Thầy đã giúp tôi hình thành và hoàn thiện kỹ năng nghiên cứu khoa học, kỹ năng làm việc nhóm và nhiều phẩm chất, kỹ năng quan trọng khác của một người làm nghiên cứu khoa học. Thầy đã dành nhiều thời gian để hướng dẫn tôi viết, chỉnh sửa và hoàn thiện các bài báo khoa học, chuyên đề và học phần liên quan đến luận án này. Thầy đã đưa tôi vào nhóm nghiên cứu và hỗ trợ cho tôi có điều kiện tham gia các hội nghị, hội thảo, seminar để có cơ hội giao lưu, học hỏi kinh nghiệm từ các nhà khoa học trong nước và quốc tế. Qua sự hướng dẫn của thầy, tôi đã học được tinh thần làm việc nghiêm túc, trách nhiệm trong nghiên cứu khoa học và nhiều phẩm chất đạo đức quý báu của thầy.

Tôi cũng xin gửi lời cảm ơn chân thành đến thầy TS. Nguyễn Viết Đông, người đã hết lòng giúp tôi vượt qua mọi khó khăn trong quá trình học tập và nghiên cứu khoa học. Thầy là tấm gương sáng, là nguồn động lực lớn lao giúp tôi không ngừng nỗ lực học tập và rèn luyện. Thầy đã truyền dạy cho tôi sự đam mê nghiên cứu khoa học, sự nhiệt huyết trong công tác giảng dạy và các vấn đề khác trong cuộc sống. Sự tận tâm với nghề và tình yêu thương hết mực với học trò của thầy đã dành cho tôi trong suốt chặng đường nghiên cứu cũng góp phần rất lớn giúp cho tôi đạt được những thành quả như ngày hôm nay.

Trong suốt thời gian học tập và nghiên cứu dưới sự chỉ bảo tận tình của quý Thầy PGS. TS. Trần Tuấn Nam và TS. Nguyễn Viết Đông, luận án đã được tác

giả trình bày một cách nghiêm túc, đầy đủ và chi tiết dựa trên những kết quả đã được nghiên cứu và công bố.

Trường Đại học Khoa học Tự nhiên - Đại học Quốc gia Thành phố Hồ Chí Minh là môi trường đã giúp tôi trưởng thành trên con đường nghiên cứu khoa học từ năm 2014 đến nay, một lần nữa cho phép tôi được gửi lời cảm ơn sâu sắc đến lãnh đạo nhà trường đã cho tôi rất nhiều cơ hội được học tập, rèn luyện và nghiên cứu tại môi trường thân yêu này. Đặc biệt, tôi cũng xin chân thành gửi lời cảm ơn sâu sắc đến quý thầy cô Khoa Toán - Tin học và Phòng Sau đại học của nhà trường.

Tôi cũng không quên gửi lời chân thành cảm ơn đến Trường Đại học Sư phạm Thành phố Hồ Chí Minh. Đây là nơi đã giúp tôi tích lũy kiến thức nền tảng, hình thành nhân cách, kỹ năng nghiên cứu khoa học trong những lĩnh vực chuyên môn mà tôi đã được nhà trường không ngừng bồi dưỡng qua các chương trình đào tạo Đại học và Thạc sĩ.

Trong suốt quá trình nghiên cứu sinh, tôi rất vinh dự được sự tài trợ và cấp học bổng của Bộ Giáo dục và Đào tạo. Học bổng đã giúp tôi có rất nhiều cơ hội và điều kiện để chuyên tâm nghiên cứu, học tập. Từ những lí do đó, tôi xin cảm ơn Chương trình đào tạo Tiến sĩ theo "Đề án 911" của Bộ Giáo dục và Đào Tạo và Chính phủ đã giúp những học viên chúng tôi hoàn thành mọi kết quả học tập của mình.

Tôi cũng xin cảm ơn các thành viên trong nhóm nghiên cứu, đặc biệt xin được gửi lời cảm ơn chân thành và lời chúc tốt đẹp đến TS. Nguyễn Minh Trí, người đã nhiệt tình hướng dẫn, góp ý, chỉnh sửa và đưa ra rất nhiều ý tưởng để giúp tôi hoàn tất những kết quả vô cùng quan trọng của Luận án này.

Cuối cùng, tôi bày tỏ lòng cảm ơn sâu sắc đến những người thân trong gia đình tôi, những người đã tạo mọi điều kiện, khuyến khích và tạo mọi động lực lớn lao để tôi có thể toàn tâm làm việc và nghiên cứu khoa học.

Mục lục

Lời cam đoan	1
Lời cảm ơn	2
Danh mục các kí hiệu	6
Mở đầu	7
1 Kiến thức cơ sở	13
1.1 Dây phổ Grothendieck	13
1.2 Tập các ideal nguyên tố liên kết và gần kết	15
1.3 Đối đồng điều địa phương	16
1.4 Đối đồng điều địa phương theo một cặp ideal	19
1.5 Đối đồng điều địa phương suy rộng theo một cặp ideal	20
2 Môđun Lasker yếu và đối đồng điều địa phương theo một cặp ideal	24
2.1 Tính Lasker yếu của đối đồng điều địa phương theo một cặp ideal	25
2.2 Tính hữu hạn của đối đồng điều địa phương theo một cặp ideal	30
3 Tính Artin và Artin yếu của môđun đối đồng điều địa phương theo một cặp ideal	34
3.1 Tính Artin yếu của đối đồng điều địa phương theo một cặp ideal	35
3.2 Tính Artin của môđun đối đồng điều địa phương theo một cặp ideal	41

4	Tính minimax và cominimax của đối đồng điều địa phương suy rộng theo một cặp idêan	51
4.1	Tính minimax của đối đồng điều địa phương suy rộng	52
4.2	Tính cominimax của đối đồng điều địa phương suy rộng	56
5	Tập idêan nguyên tố liên kết, gắn kết của đối đồng điều địa phương suy rộng theo một cặp idêan	63
5.1	Tập idêan nguyên tố liên kết của đối đồng điều địa phương theo một cặp idêan	64
5.2	Tập idêan nguyên tố liên kết của đối đồng điều địa phương suy rộng theo một cặp idêan	68
5.3	Tập idêan nguyên tố gắn kết của đối đồng điều địa phương suy rộng bậc lớn nhất theo một cặp idêan	75
6	Kết quả và bàn luận	81
	Danh mục các công trình của tác giả	84
	Tài liệu tham khảo	85

Danh mục các kí hiệu

$(R, \mathfrak{m})$	: Vành địa phương với ideal tối đại $\mathfrak{m}$
$\text{Ass}_R(M)$	: Tập các ideal nguyên tố liên kết của M
$\text{Att}_R(M)$	: Tập các ideal nguyên tố gắn kết của M
$\text{cd}(I, M)$	: Chiều đối đồng điều của M theo ideal I
$\dim(M)$	: Chiều Krull của M
$H_I^i(M)$	: Môđun đối đồng điều địa phương thứ i của M theo ideal I
$H_I^i(M, N)$	: Môđun đối đồng điều địa phương suy rộng thứ i của M, N theo ideal I
$H_{I,J}^i(M)$	: Môđun đối đồng điều địa phương thứ i của M theo cặp ideal (I, J)
$H_{I,J}^i(M, N)$	: Môđun đối đồng điều địa phương suy rộng thứ i của M, N theo cặp ideal (I, J)
$\text{pd}(M)$	: Chiều xạ ảnh của M
$\text{Spec}(R)$	: Tập các ideal nguyên tố của vành R
$\text{Supp}_R(M)$	: Giá của môđun M
$V(I)$	: Tập các ideal nguyên tố chứa I
$W(I, J)$	$= \{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(R) \mid I^n \subseteq \mathfrak{p} + J \text{ với } n \gg 1\}$
$\tilde{W}(I, J)$	$= \{\mathfrak{a} \triangleleft R \mid I^n \subseteq \mathfrak{a} + J \text{ với } n \gg 1\}$

Mở đầu

Lý thuyết đối đồng điều địa phương được A. Grothendieck giới thiệu vào những năm 1960 (xem [67]), đóng một vai trò quan trọng trong Đại số giao hoán và Hình học đại số. Cho $\mathfrak{a}$ là một ideal của một vành Noether giao hoán R và một R -môđun M . Khi đó hàm tử $\Gamma_{\mathfrak{a}}$ từ phạm trù các R -môđun vào chính nó được xác định bởi $\Gamma_{\mathfrak{a}}(M) = \{m \in M \mid \mathfrak{a}^n m = 0 \text{ với } n \text{ đủ lớn}\}$. Hàm tử dẫn xuất phải thứ i của $\Gamma_{\mathfrak{a}}$ kí hiệu là $H_{\mathfrak{a}}^i$ và được gọi là hàm tử đối đồng điều địa phương thứ i theo $\mathfrak{a}$. Với mỗi R -môđun M , ta có đẳng cấu $H_{\mathfrak{a}}^i(M) \cong \varinjlim_n \text{Ext}_R^i(R/\mathfrak{a}^n, M)$. Lý thuyết “Đối đồng điều địa phương” đã và đang được mở rộng theo nhiều hướng khác nhau. Trong đó có sự ra đời của *môđun đối đồng điều địa phương suy rộng* vào những năm 1970, khái niệm này đã được nhà toán học Herzog giới thiệu trong [68] và hiện nay nó đang được nhiều nhà toán học trong và ngoài nước nghiên cứu. Cho M, N là các R -môđun, khi đó môđun đối đồng điều địa phương suy rộng thứ i của M, N theo ideal $\mathfrak{a}$ được xác định như sau $H_{\mathfrak{a}}^i(M, N) \cong \varinjlim_n \text{Ext}_R^i(M/\mathfrak{a}^n M, N)$. Một sự mở rộng khác được đưa ra vào năm 2009 trong [58] bởi Takahashi, Yoshino và Yoshizawa. Họ giới thiệu *môđun đối đồng điều địa phương theo một cặp ideal* và nghiên cứu các tính chất của chúng. Đầu tiên, các tác giả định nghĩa *môđun con (I, J) -xoắn* của R -môđun M , kí hiệu $\Gamma_{I,J}(M)$, như sau: $\Gamma_{I,J}(M) = \{m \in M \mid I^n m \subseteq Jm \text{ với } n \gg 1\}$. Khi đó $\Gamma_{I,J}$ là một hàm tử hiệp biến, cộng tính và khớp trái từ phạm trù các R -môđun vào chính nó. Hàm tử dẫn xuất phải thứ i của $\Gamma_{I,J}$ được kí hiệu là $H_{I,J}^i$ và được gọi là hàm tử đối đồng điều địa phương thứ i theo cặp ideal (I, J) . Môđun đối đồng điều địa phương theo một cặp ideal đã được nghiên cứu và trình bày trong [58, 1.13, 2.4, 2.6, 3.2] về tính chất Artin trong Phần 2 của [14] và [48]; tính hữu hạn sinh được trình bày trong [50, 2.4 - 2.7]. Sau đó đã được Zamani đưa ra khái niệm

môđun đối đồng điều địa phương suy rộng theo một cặp idêan vào năm 2011, trong [66]. Cho M, N là các R -môđun và I, J là các idêan của vành Noether giao hoán R . Khi đó môđun đối đồng điều địa phương suy rộng thứ i của M, N theo cặp idêan (I, J) được xác định như sau $H_{I,J}^i(M, N) = H^i(\text{Hom}_R(M, \Gamma_{I,J}(E^\bullet)))$ với $E^\bullet$ là một phép giải nội xạ của N . Vào năm 2014, trong [40] các tác giả Trần Tuấn Nam, Nguyễn Minh Trí và Nguyễn Viết Đông đưa ra Định nghĩa: Cho các R -môđun M và N , ta kí hiệu $\Gamma_{I,J}(M, N)$ là môđun được xác định như sau $\Gamma_{I,J}(M, N) = \Gamma_{I,J}(\text{Hom}_R(M, N))$. Khi đó $\Gamma_{I,J}(M, -)$ là một hàm tử hiệp biến, R -tuyến tính và khớp trái từ phạm trù các R -môđun vào chính nó. Các hàm tử dẫn xuất phải thứ i của $\Gamma_{I,J}(M, -)$ kí hiệu là $H_{I,J}^i(M, -)$ và được gọi là hàm tử đối đồng điều địa phương suy rộng thứ i theo cặp idêan (I, J) . Với mỗi R -môđun N , môđun $H_{I,J}^i(M, N)$ được gọi là môđun đối đồng điều địa phương suy rộng thứ i của M, N theo cặp idêan (I, J) . Ta thấy rằng, khi M hữu hạn sinh thì định nghĩa của Zamani và định nghĩa trên là tương đương. Trong đó, chúng ta đặc biệt ghi nhận những kết quả hết sức nổi bật về chủ đề này đã được nhóm tác giả T.T.Nam và N.M.Trí nghiên cứu mở rộng trong các bài báo thuộc danh mục ISI đã được công bố [38, 39, 40, 41, 42, 43, 44] từ năm 2013 đến năm 2019.

Trong luận án, chúng tôi luôn giả sử vành R là vành Noether giao hoán có đơn vị $1 \neq 0$ và $\mathfrak{a}, I, J$ là các idêan của R . Nội dung luận án gồm 5 chương, trong đó các chương 2, 3, 4, 5 trình bày nội dung chính của luận án.

Chương 1 giới thiệu lại các khái niệm, dãy phổ Grothendieck, các môđun đối đồng điều địa phương theo một idêan, theo một cặp idêan và các tính chất liên quan của chúng đã được công bố trong: [1, 12, 14, 17, 35, 38, 40, 41, 44, 50, 52, 58, 66, 67, 68, 69] để làm kiến thức cơ sở cho những phần trình bày tiếp theo.

Tính Lasker yếu, tính hữu hạn, đối hữu hạn và các kết quả khác cũng đã được nghiên cứu và ta có thể nhắc đến những kết quả nghiên cứu của Divaani-Aazar và Sazeeleh [21] năm 2004; Bahmanpour và Naghipour [7] năm 2008; Bahmanpour và Naghipour [8] năm 2009; Azami và Naghipour [4] năm 2009; Tehranian và Talemi [60] năm 2010; Zamani [65] năm 2011; Borna, Sahadi và Yassemi [9] năm 2011; Abbasi, Roshan-Shekalguorabi, Rasht [1] năm 2014; Bahmanpour [6] năm 2014; T. T. Nam và N. M. Trí [42] năm 2016; nhóm tác giả T.T.Nam, N.M.Trí và N.T.Nam [62] và [46] trong năm 2019. Chương 2 nghiên cứu về các mối liên

hệ giữa các đối đồng điều địa phương và tính Lasker yếu, tính đối Lasker yếu, tính hữu hạn và tính đối hữu hạn. Những kết quả có được của chương này là những kết quả mới của tác giả và nhóm nghiên cứu đã được đăng trong các bài báo [46, 62]. Chúng tôi đã chứng minh rằng nếu M là một R -module I -Lasker yếu và t là số nguyên không âm sao cho $H_I^i(M)$ là I -Lasker yếu với mọi $i < t$, khi đó tập các idêan nguyên tố liên kết của $H_I^t(M)$ là hữu hạn. Nếu t là số nguyên không âm sao cho $\text{Ext}_R^{t+k}(R/\mathfrak{a}, M)$ và $\text{Ext}_R^{t+1+k-i}(R/\mathfrak{a}, H_{I,J}^i(M))$ là Lasker yếu với mọi $i < t$, $\mathfrak{a} \in \tilde{W}(I, J)$ và $k = 0$ or 1 , thì $\text{Ext}_R^k(R/\mathfrak{a}, H_{I,J}^t(M))$ Lasker yếu. Nếu $\text{Ext}_R^i(R/I, M)$ là J -Lasker yếu với mọi $i \geq 0$ và n là số nguyên không âm sao cho $H_{I,J}^i(M)$ is (I, J) -đối Lasker yếu với mọi $i \neq n$, thì $H_{I,J}^n(M)$ is (I, J) -đối Lasker yếu. Nếu $H_{I,J}^i(M)$ là (I, J) -đối Lasker yếu với mọi $i < n$ và $\text{Ext}_R^n(R/I, M)$ là J -Lasker yếu thì $\text{Hom}_R(R/I, H_{I,J}^n(M))$ là J -Lasker yếu.

Chương 3, tác giả cụ thể hóa một phần các kết quả đạt được và chứng minh làm rõ về tính Artin của các đối đồng điều địa phương theo một cặp idêan, tính Artin của đối đồng điều địa phương suy rộng theo một cặp idêan. Chúng tôi đã chứng minh rằng $H_{\mathfrak{a}}^i(M)$ là Artin với mọi $\mathfrak{a} \in \tilde{W}(I, J)$ nếu M là hữu hạn sinh và $\text{Supp}_R(H_{I,J}^i(M)) \subseteq \text{Max}(R)$. Hơn nữa, trên vành địa phương chúng ta có các điều kiện tương đương về tính Artin của $H_{I,J}^i(M)$ và $H_{\mathfrak{a}}^i(M)$, khi $\mathfrak{a} \in \tilde{W}(I, J)$. Chúng tôi cũng nói đến các môđun đối đồng điều bậc lớn nhất $H_{I,J}^{\dim M}(M)$ khi M Lasker yếu. Chúng tôi nhận được kết quả là $\text{Supp}_R(H_{I,J}^{\dim M-1}(M)/JH_{I,J}^{\dim M-1}(M))$ là một tập hợp hữu hạn. Chúng tôi chứng minh rằng $H_{I,J}^d(M)/JH_{I,J}^d(M)$ là Artin yếu nếu M R -môđun Lasker yếu với $d = \dim M$. Hơn nữa, nếu $(R, \mathfrak{m})$ là vành địa phương, thì $H_{I,J}^d(M)$ là Artin hoặc $\text{Supp}_R(H_{I,J}^d(M))$ là hữu hạn. Một mối liên hệ giữa tính Artin yếu của $H_{I,J}^i(M)$ và $H_I^i(M)$ sẽ được chứng minh. Một trong những kết quả chính ở đây là trên vành địa phương $(R, \mathfrak{m})$, môđun $H_{I,J}^i(M, N)$ là Artin với mọi $i \leq t$ nếu và chỉ nếu $H_{\mathfrak{a}}^i(M, N)$ là Artin với mọi $i \leq t$ và $\mathfrak{a} \in \tilde{W}(I, J)$. Trong đó, chúng tôi nghiên cứu về tính Artin của $H_{I,J}^i(M, N)$. Trước tiên chúng tôi nhận thấy nếu $(R, \mathfrak{m})$ là vành địa phương và t là số nguyên không âm sao cho $\text{Supp}_R(H_{I,J}^i(M)) \subseteq \{\mathfrak{m}\}$ với mọi $i \leq t$, khi đó $H_{I,J}^i(M) \cong H_{\mathfrak{m},J}^i(M) \cong H_{\mathfrak{m}}^i(M)$ với mọi $i \leq t$. Ngoài ra, chúng tôi chứng minh đẳng cấu $H_{I,J}^i(M, N) \cong H_{\mathfrak{m},J}^i(M, N)$ với điều kiện $\text{Supp}_R(H_{I,J}^i(M, N)) \subseteq \{\mathfrak{m}\}$. Trong trường hợp $(R, \mathfrak{m})$ là vành địa phương và N là môđun minimax sao cho

$\text{Supp}_R(H_{I,J}^i(M, N)) \subseteq \{\mathfrak{m}\}$ Chúng tôi chứng minh rằng $H_{I,J}^i(M, N)$ là Artin. Kết quả quan trọng mà chúng tôi có được ở chương này là trên vành địa phương $(R, \mathfrak{m})$, môđun $H_{I,J}^i(M, N)$ là Artin với mọi $i \leq t$ nếu và chỉ nếu $H_{\mathfrak{a}}^i(M, N)$ là Artin với mọi $i \leq t$ và $\mathfrak{a} \in \tilde{W}(I, J)$. Nếu N là minimax, thì $H_{I,J}^{p+d}(M, N)$ Artin. Từ đây cho chúng ta đẳng cấu $H_{I,J}^i(M, N) \cong H_{\mathfrak{m},J}^i(M, N)$ trong trường hợp $\text{Supp}_R(H_{I,J}^i(M, N)) \subseteq \{\mathfrak{m}\}$. Khi $(R, \mathfrak{m})$ là vành địa phương và N là minimax thỏa mãn $\text{Supp}_R(H_{I,J}^i(M, N)) \subseteq \{\mathfrak{m}\}$ chúng tôi chứng minh được rằng $H_{I,J}^i(M, N)$ là Artin. Nếu $(R, \mathfrak{m})$ là vành địa phương và t là số nguyên không âm sao cho $\text{Supp}_R(H_{I,J}^i(M)) \subseteq \{\mathfrak{m}\}$ với mọi $i \leq t$, thì $H_{I,J}^i(M) \cong H_{\mathfrak{m},J}^i(M) \cong H_{\mathfrak{m}}^i(M)$ với mọi $i \leq t$. Kết quả cũng được chứng minh $H_{\mathfrak{a}}^i(M)$ là Artin với mọi $\mathfrak{a} \in \tilde{W}(I, J)$ nếu M là hữu hạn sinh và $\text{Supp}_R(H_{I,J}^i(M)) \subseteq \text{Max}(R)$.

Tính minimax của các môđun đã được Zöschinger giới thiệu trong [69] từ những năm 1986 và đang nhận được sự quan tâm nghiên cứu của nhiều nhà khoa học như: Azami và Naghipour [4] năm 2009; Aghapournahr và Melkersson [2] năm 2010; Gu [23] năm 2013; nhóm tác giả T.T.Nam, N.M.Trí và N.T.Nam [62] và [46] năm 2019; T.T.Nam, N.M.Trí và N.T.Nam [47] năm 2020. Trong đó, có nhiều kết quả quan trọng trình bày về tính minimax, I -cominimax của các đối đồng điều địa phương. Mục đích của tác giả trong Chương 4 là trình bày các kết quả về tính minimax, I -cominimax và những kết quả mở rộng về tính (I, M) -cominimax của các đối đồng điều địa phương. Cho M là R -môđun hữu hạn sinh, kết quả mà chúng tôi có được là nếu N và $H_{I,J}^i(N)$ là minimax với mọi $i < t$, khi đó $\text{Hom}_R(R/\mathfrak{a}, H_{I,J}^t(M, N))$ cũng là minimax với mọi $\mathfrak{a} \in \tilde{W}(I, J)$. Chúng tôi cũng nghiên cứu về tính Artin của $H_{I,J}^i(M, N)$. Trong đó, nếu N là minimax thì $H_{I,J}^{p+d}(M, N)$ là Artin, với $p = \text{pd}M$ và $d = \dim N$. Phần này cũng chỉ ra rằng $\text{Ext}_R^t(M/IM, N)$ là minimax và $H_I^i(N)$ là (I, M) -cominimax với mọi $i < t$, khi đó $\text{Hom}_R(R/I, H_I^t(M, N))$ là minimax. Cụ thể hơn, chúng tôi đã chứng minh rằng $\text{Ext}_R^i(R/\mathfrak{a}, N)$ là minimax và trong trường hợp $\text{Ext}_R^t(R/\mathfrak{a}, N)$ là minimax thì $\text{Hom}_R(R/\mathfrak{a}, H_{I,J}^t(N))$ là minimax, $\text{Hom}_R(R/\mathfrak{a}, H_{I,J}^t(M, N))$ cũng là minimax. Từ đây, $\text{Hom}_R(K, H_{I,J}^t(N))$ là môđun minimax và $\text{Hom}_R(R/\mathfrak{a}, H_{I,J}^t(M, N)/K)$ cũng là minimax. Chúng tôi có được kết quả $\text{Ext}_R^i(M/IM, N)$ là minimax, $\text{Ext}_R^t(M/IM, N)$ là minimax và khi đó $\text{Hom}_R(R/I, H_I^t(M, N))$ minimax. Nếu $\text{Hom}_R(R/I, H_I^t(M, N))$ là minimax

và $\text{Ass}_R(H_I^t(M, N))$ là hữu hạn thì $\text{Hom}_R(R/I, H_I^t(M, N))$ là minimax, khi đó $\text{Ext}_R^i(M/IM, N)$ và $\text{Ext}_R^i(R/I, N)$ là minimax.

Tập các idêan nguyên tố liên kết, gắn kết của môđun là nội dung quan trọng trong đại số giao hoán và hình học đại số khi chúng ta nghiên cứu về cấu trúc của vành giao hoán của môđun đối đồng điều địa phương, nội dung này đã được giới thiệu vào những năm 1968. Kết quả nghiên cứu về tập idêan nguyên tố liên kết có thể nhắc đến Grothendieck [67]; Faltings [22]; Brodmann [11]; Divaani-Aazar [17]; Katzman [29]; Singh và Swanson [55] năm 2004; Divaani-Aazar và Mafi [20] năm 2006; Lorestani, Sahandi và Sharif [31] năm 2006; Nguyen Van Hoang [27] năm 2008; Pham Hung Quy [51] năm 2010; nhóm tác giả T.T.Nam và N.M.Trí [38, 39, 40, 41, 42, 43, 44] từ năm 2013 đến năm 2016. Trong đó trình bày rõ về tập idêan nguyên tố liên kết của đối đồng điều địa phương theo một cặp idêan, đối đồng điều địa phương suy rộng theo một cặp idêan, các mối liên hệ giữa chúng. Chương 5, chúng tôi nghiên cứu về tính hữu hạn của tập các idêan nguyên tố liên kết, gắn kết của đối đồng điều địa phương suy rộng theo một cặp idêan. Chúng tôi nhận thấy nếu t là số nguyên không âm sao cho $\text{Ext}_R^{t+k}(R/\mathfrak{a}, M)$ và $\text{Ext}_R^{t+1+k-i}(R/\mathfrak{a}, H_{I,J}^i(M))$ là Lasker yếu với mọi $i < t$, $\mathfrak{a} \in \tilde{W}(I, J)$ và $k = 0$ or 1 thì $\text{Ext}_R^k(R/\mathfrak{a}, H_{I,J}^t(M))$ là Lasker yếu. Trường hợp đặc biệt, tập hợp $\text{Ass}_R(\text{Hom}_R(R/\mathfrak{a}, H_{I,J}^t(M)))$ là hữu hạn. Ta có được $\text{Ass}_R(H_{I,J}^n(M)/JH_{I,J}^n(M))$ và $\text{Ass}_R(H_I^t(M, N))$ hữu hạn. Kết quả đạt được $\text{Ass}_R(\text{Hom}_R(R/\mathfrak{a}, H_{I,J}^t(M)))$, $\text{Ass}_R(\text{Hom}_R(R/\mathfrak{a}, H_{I,J}^t(M)))$ là hữu hạn. Ta cũng có được $\text{Ass}_R(\text{Ext}_R^2(R/\mathfrak{a}, H_{I,J}^t(M)))$, $\text{Ass}_R(\text{Hom}_R(R/\mathfrak{a}, H_{I,J}^{t+1}(M)))$ là hữu hạn. Có thể nhắc đến $\text{Hom}_R(R/I, H_{I,J}^t(M))$, $\text{Hom}_R(R/\mathfrak{a}, H_{I,J}^t(M, N))$, $\text{Ext}_R^k(R/\mathfrak{a}, H_{I,J}^t(M))$ và hơn nữa $\text{Hom}_R(R/I, H_{I,J}^t(M)/N)$ Lasker yếu. Trong một số trường hợp ta cũng sẽ có được kết quả $\text{Ass}_R(\text{Hom}_R(R/I, H_{I,J}^t(M)))$, $\text{Ass}_R(H_{\mathfrak{a}}^t(M, N))$ là hữu hạn. $\text{Ass}_R(H_{\mathfrak{a}}^t(M, N))$, $\text{Ass}_R(H_I^t(M, N))$, $\text{Ass}_R(H_{I,J}^t(M, N))$ và $\text{Ass}_R(H_{I,J}^t(M, N))$ cũng được chứng minh là hữu hạn. Tiếp theo ta có được $\text{Supp}_R(H_{I,J}^i(M, N))$ là hữu hạn và $\text{Ass}_R(H_{I,J}^t(M, N))$ hữu hạn trong một số trường hợp nào đó. Trong mục này, chúng tôi nhắc đến tập các idêan gắn kết của môđun đối đồng điều địa phương suy rộng bậc cao nhất $H_{I,J}^{p+d}(M, N)$ là $\text{Att}(H_{I,J}^{p+d}(M, N)) = \{\mathfrak{p} \in \text{Ass}_R(N/JN) \mid \text{cd}(I, M, R/\mathfrak{p}) = p + d\}$. Chúng tôi chứng minh rằng nếu $I + J$ là $\mathfrak{m}$ -thứ cấp và $\dim N = d > 0$, khi đó $H_{I,J}^{p+d}(M, N) = 0$ hoặc $H_{I,J}^{p+d}(M, N)$ không là hữu hạn sinh.

Các kết quả đã được báo cáo và thảo luận tại:

- Hội nghị "Đại số - Hình học - Tôpô", Buôn Ma Thuật, Đắk Lắk, 10/2016.
- Hội nghị khoa học lần thứ 10, Đại học Khoa học Tự nhiên - Đại học Quốc gia thành phố Hồ Chí Minh, 11/2016.
- Hội thảo Toán học và Đổi mới phương pháp dạy học tại Khoa Toán - Tin học, Đại học Sư phạm thành phố Hồ Chí Minh, 8/2018.
- Hội nghị khoa học lần thứ 11, Đại học Khoa học Tự nhiên - Đại học Quốc gia thành phố Hồ Chí Minh, 11/2018.

Chương 1

Kiến thức cơ sở

Lý thuyết đối đồng điều địa phương được A. Grothendieck giới thiệu vào những năm 1960 (xem [67]) và sự ra đời của *môđun đối đồng điều địa phương suy rộng* đã được nhà toán học Herzog giới thiệu trong [68] năm 1970. Năm 2009 trong [58] bởi Takahashi, Yoshino và Yoshizawa, nhóm các tác giả này đã giới thiệu *môđun đối đồng điều địa phương theo một cặp idêan* và nhiều kết quả liên quan. Năm 2011, trong [66], Zamani đưa ra khái niệm *môđun đối đồng điều địa phương suy rộng theo một cặp idêan*. Năm 2014, trong [40] cũng đã đưa ra định nghĩa khác về *môđun đối đồng điều địa phương suy rộng theo một cặp idêan*, thực tế cho thấy hai định nghĩa này là trùng nhau. Mục tiêu của Chương 1 là giới thiệu lại các khái niệm, dãy phổ Grothendieck, các môđun đối đồng điều địa phương theo một idêan, theo một cặp idêan và các tính chất liên quan.

1.1 Dãy phổ Grothendieck

Định nghĩa 1.1.1. Một dãy phổ là dãy $(E_r, d_r)_{r \geq 1}$ của các môđun song phân bậc vì phân sao cho: $E_{r+1} = H^\bullet(E_r, d_r) = \{E_r^{p,q}\}_{p,q \in \mathbb{Z}}$ với mọi r . Trong đó: $d_r^{p,q} : E_r^{p,q} \rightarrow E_r^{p+r, q+1-r}$ là các đồng cấu song cấp $(r, 1-r)$ và $E_{r+1}^{p,q} = \text{Ker} d_r^{p,q} / \text{Im} d_r^{p-r, q+r-1}$.

Định nghĩa 1.1.2. Dãy phổ $(E_r, d_r)_{r \geq 1}$ hội tụ về một môđun phân bậc H^n , kí hiệu là

$$E_2^{p,q} \Rightarrow_p H^n,$$

nếu có một lọc bị chặn $(\Phi^p H^n)$ nào đó của H^n sao cho

$$E_\infty^{p,q} \cong \Phi^p H^n / \Phi^{p+1} H^n$$

với mọi n (ta nhắc lại rằng $n = p + q$).

Cho $0 \leq n = p + q$, có một cái lọc Φ của H^n sao cho

$$0 = \Phi^{n+1} H^n \subseteq \Phi^n H^n \subseteq \dots \subseteq \Phi^1 H^n \subseteq \Phi^0 H^n = H^n$$

Cho ta đẳng cấu các dãy phổ

$$E_\infty^{i,n-i} \cong \Phi^i H^n / \Phi^{i+1} H^n, 0 \leq i \leq n.$$

Ý nghĩa của chỉ số p (được gọi là cấp lọc) trong kí hiệu $E_\infty^{p,q} \cong \Phi^p H^n / \Phi^{p+1} H^n$ nghĩa là đẳng cấu này liên quan đến khái niệm giới hạn $E_\infty^{p,q}$, nó không đẳng cấu với $E_\infty^{p,q}$.

Định nghĩa 1.1.3. Cho $\mathcal{B}$ là phạm trù aben đủ xạ ảnh (hoặc đủ nội xạ) và cho $F : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}b$ là một hàm tử cộng tính và hiệp biến. Một vật B được gọi là F -không tuần hoàn phải nếu $(R^p F)B = 0$ với mọi $p \geq 1$.

Ví dụ 1.1.4. Nếu $F = \text{Hom}_R(A, -)$ thì mọi R -môđun nội xạ E đều là F -không tuần hoàn phải vì $\text{Ext}_R^i(A, E) = 0$ với mọi $i \geq 1$.

Có bốn dãy phổ Grothendieck liên quan đến các biến và các hàm tử: Hai dãy phổ (đồng điều) góc phần tư thứ nhất và hai dãy phổ (đối đồng điều) góc phần tư thứ ba. Dưới đây là dãy phổ Grothendieck mà chúng ta sẽ thường sử dụng để chứng minh các kết quả liên quan đến các môđun đối đồng điều địa phương ở các chương tiếp theo

Định lý 1.1.5 (Grothendieck). Cho $\mathcal{A} \xrightarrow{G} \mathcal{B} \xrightarrow{F} \mathcal{C}$ là các hàm tử hiệp biến cộng tính trên các phạm trù aben đủ nội xạ $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$. Giả sử F là hàm tử khớp trái và GE là F -không tuần hoàn phải với mọi vật nội xạ E trong $\mathcal{A}$. Khi đó, với mỗi vật A trong $\mathcal{A}$, ta có một dãy phổ góc phần tư thứ nhất thỏa

$$E_2^{p,q} = (R^p F)(R^q G)A \Rightarrow_p R^n(FG)A.$$

1.2 Tập các idêan nguyên tố liên kết và gắn kết

Định nghĩa 1.2.1. ([11]) Cho M là R -môđun và ta ký hiệu $\text{Ass}_R(M)$ là tập các idêan liên kết của M , khi đó tập

$$\text{Ass}_R(M) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(R) \mid (0 :_R x) = \mathfrak{p} \text{ với } x \text{ là một số phần tử nào đó thuộc } M\}$$

Hay nói cách khác, một idêan nguyên tố $\mathfrak{p}$ của R được gọi là idêan nguyên tố liên kết của M nếu $\mathfrak{p} = \text{Ann}_R(M)$.

Mệnh đề 1.2.2. ([11]) Cho M là R -môđun hữu hạn sinh, khi đó

- (i) $\text{Ass}_R(M)$ là hữu hạn
- (ii) $\text{Ass}_R(\Gamma_{\mathfrak{a}}(M)) = \text{Ass}_R(M) \cap V(\mathfrak{a})$
- (iii) $\text{Ass}_R(M/\Gamma_{\mathfrak{a}}(M)) = \text{Ass}_R(M) \setminus V(\mathfrak{a})$

Để định nghĩa về idêan nguyên tố gắn kết của một môđun, trước tiên ta nhắc lại nội dung về phân tích sơ cấp được giới thiệu bởi I. G. Macdonald trong [36]. Một R -môđun $M \neq 0$ được gọi là thứ cấp nếu, cho bất kỳ $x \in R$, tích bởi x trên M là một toàn ánh hoặc lũy linh. Khi đó $\sqrt{\text{Ann}_R(M)}$ là một idêan nguyên tố $\mathfrak{p}$ và chúng ta nói rằng M is $\mathfrak{p}$ -thứ cấp. Một biểu diễn thứ cấp của M là một sự phân tích M thành tổng hữu hạn của các môđun thứ cấp. Nếu tồn tại một phân tích như vậy, ta sẽ nói M là phân tích được. Có thể thấy, một môđun không được xem là phân tích được. Một sự phân tích thứ cấp của M $M = M_1 + \dots + M_k$, với M_i là $\mathfrak{p}_i$ -thứ cấp, được gọi là tối thiểu nếu các idêan nguyên tố $\mathfrak{p}_i$ là phân biệt và không có số hạng M_i là trùng lặp. Bất kỳ phân tích thứ cấp nào thì cũng có thể đưa về một phân tích thứ cấp tối thiểu. Mọi phân tích thứ cấp của M đều có thể chuyển thành một phân tích tối thiểu.

Định nghĩa 1.2.3. ([36]) Tập hợp $\{\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_k\}$ được gọi là tập các idêan nguyên tố gắn kết của M và ký hiệu bởi $\text{Att}_R(M)$.

Lưu ý rằng, môđun Artin là các môđun phân tích được ([36]). Trong [70], Zöschinger đã đưa ra định nghĩa khác về tập các idêan gắn kết. Cho M là một R -môđun (không cần thiết phải được phân tích thứ cấp), một idêan nguyên tố

$\mathfrak{p}$ của R được gọi là idêan nguyên tố gắn kết của M nếu $\mathfrak{p} = \text{Ann}_R(M/T)$ với T là môđun con của M . Định nghĩa này thỏa mãn cho một idêan nguyên tố gắn kết nếu M được cho là có thể phân tích thứ cấp.

Bổ đề 1.2.4 (Xem [3]). *Các phát biểu sau đây là đúng*

(i) *Nếu $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ là dãy khớp của các R -môđun thì*

$$\text{Att}_R C \subseteq \text{Att}_R B \subseteq \text{Att}_R C \cup \text{Att}_R A.$$

(ii) *nếu N là R -môđun hữu hạn sinh thì*

$$\text{Att}_R(M \otimes_R N) = \text{Att}_R M \cap \text{Supp}_R N$$

với mọi R -môđun M .

1.3 Đối đồng điều địa phương

Định nghĩa 1.3.1. Cho M là R -môđun. Tập

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mathfrak{a}}(M) &= \{x \in M \mid \mathfrak{a}^n x = 0 \text{ với } n \text{ là một số tự nhiên nào đó}\} \\ &= \bigcup_{n \geq 0} (0 :_M \mathfrak{a}^n) \end{aligned}$$

là R -môđun con của M .

Với mỗi R -đồng cấu $f : M \rightarrow N$, ta có $f(\Gamma_{\mathfrak{a}}(M)) \subseteq \Gamma_{\mathfrak{a}}(N)$ và do đó f cảm sinh đồng cấu

$$\Gamma_{\mathfrak{a}}(f) : \Gamma_{\mathfrak{a}}(M) \rightarrow \Gamma_{\mathfrak{a}}(N)$$

là thu hẹp của f trên $\Gamma_{\mathfrak{a}}(M)$.

Nếu $f : M \rightarrow N$ và $g : N \rightarrow P$ là các đồng cấu R -môđun thì $\Gamma_{\mathfrak{a}}(g \circ f) = \Gamma_{\mathfrak{a}}(g) \circ \Gamma_{\mathfrak{a}}(f)$ và $\Gamma_{\mathfrak{a}}(1_M) = 1_{\Gamma_{\mathfrak{a}}(M)}$. Hơn nữa, nếu $f, g : M \rightarrow N$ là các đồng cấu R -môđun và $r \in R$ thì $\Gamma_{\mathfrak{a}}(f + g) = \Gamma_{\mathfrak{a}}(f) + \Gamma_{\mathfrak{a}}(g)$ và $\Gamma_{\mathfrak{a}}(rf) = r\Gamma_{\mathfrak{a}}(f)$. Như vậy, $\Gamma_{\mathfrak{a}}(-)$ là một hàm tử hiệp biến, tuyến tính từ phạm trù các R -môđun vào chính nó. Ta gọi $\Gamma_{\mathfrak{a}}(-)$ là hàm tử $\mathfrak{a}$ -xoắn.

Định nghĩa 1.3.2. Với mỗi $i \in \mathbb{N}$, hàm tử dẫn xuất phải thứ i của $\Gamma_{\mathfrak{a}}(-)$ được kí hiệu là $H_{\mathfrak{a}}^i(-)$ và được gọi là *hàm tử đối đồng điều địa phương thứ i theo idêan $\mathfrak{a}$* .

Với mỗi R -môđun M , ta gọi $H_{\mathfrak{a}}^i(M)$ là môđun đối đồng điều địa phương thứ i của M theo idêan $\mathfrak{a}$ và $\Gamma_{\mathfrak{a}}(M)$ là môđun con $\mathfrak{a}$ -xoắn của M . Nếu $\Gamma_{\mathfrak{a}}(M) = 0$ thì M được gọi là $\mathfrak{a}$ -xoắn tự do. Nếu $M = \Gamma_{\mathfrak{a}}(M)$ thì M được gọi là môđun $\mathfrak{a}$ -xoắn.

Từ định nghĩa trên, ta có một số tính chất cơ bản của môđun đối đồng điều địa phương.

Nhận xét 1.3.3. (i) Các môđun đối đồng điều địa phương $H_{\mathfrak{a}}^i(M)$ có thể được tính như sau: Đầu tiên, ta chọn một phép giải nội xạ $(I^{\bullet}, d^{\bullet})$ của M

$$0 \rightarrow M \rightarrow I^0 \rightarrow I^1 \rightarrow \dots,$$

với I^i là các R -môđun nội xạ. Sau đó, áp dụng hàm tử $\Gamma_{\mathfrak{a}}(-)$ vào đối phức $(I^{\bullet}, d^{\bullet})$

$$\dots \rightarrow 0 \rightarrow I^0 \rightarrow I^1 \rightarrow I^2 \rightarrow \dots$$

ta được đối phức $(\Gamma_{\mathfrak{a}}(I^{\bullet}), \Gamma_{\mathfrak{a}}(d^{\bullet}))$

$$\dots \rightarrow 0 \rightarrow \Gamma_{\mathfrak{a}}(I^0) \rightarrow \Gamma_{\mathfrak{a}}(I^1) \rightarrow \Gamma_{\mathfrak{a}}(I^2) \rightarrow \dots.$$

Tiếp theo, ta lấy đối đồng điều thứ i của đối phức trên

$$H_{\mathfrak{a}}^i(M) = H^i(\Gamma_{\mathfrak{a}}(I^{\bullet}), \Gamma_{\mathfrak{a}}(d^{\bullet})) = \text{Ker}(\Gamma_{\mathfrak{a}}(d^i)) / \text{Im}(\Gamma_{\mathfrak{a}}(d^{i-1})).$$

(ii) Vì hàm tử $\Gamma_{\mathfrak{a}}(-)$ là một hàm tử hiệp biến và R -tuyến tính nên $H_{\mathfrak{a}}^i(-)$ cũng là một hàm tử hiệp biến và R -tuyến tính với mọi $i \geq 0$.

(iii) Do $\Gamma_{\mathfrak{a}}(-)$ là một hàm tử khớp trái nên $\Gamma_{\mathfrak{a}}(-)$ tương đương tự nhiên với hàm tử $H_{\mathfrak{a}}^0(-)$. Khi đó, ta có thể đồng nhất hai hàm tử này với nhau.

(iv) Cho một dãy khớp ngắn các R -môđun

$$0 \rightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \rightarrow 0.$$

Với mỗi số tự nhiên i , ta có một đồng cấu nối $H_{\mathfrak{a}}^i(N) \rightarrow H_{\mathfrak{a}}^{i+1}(L)$ và các đồng cấu

nối này tạo thành một dãy khớp dài

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H_{\mathfrak{a}}^0(L) \rightarrow H_{\mathfrak{a}}^0(M) \rightarrow H_{\mathfrak{a}}^0(N) \rightarrow \\ \rightarrow H_{\mathfrak{a}}^1(L) \rightarrow H_{\mathfrak{a}}^1(M) \rightarrow H_{\mathfrak{a}}^1(N) \rightarrow \\ \rightarrow \cdots \rightarrow H_{\mathfrak{a}}^i(L) \rightarrow H_{\mathfrak{a}}^i(M) \rightarrow H_{\mathfrak{a}}^i(N) \rightarrow \\ \rightarrow H_{\mathfrak{a}}^{i+1}(L) \rightarrow \cdots . \end{aligned}$$

Ta thấy rằng $H_{\mathfrak{a}}^i(M)$ là các R -môđun $\mathfrak{a}$ -xoắn với mọi $i \geq 0$. Hơn nữa, nếu M là một R -môđun nội xạ thì $H_{\mathfrak{a}}^i(M) = 0$ với mọi $i > 0$.

Mệnh đề 1.3.4. *Cho I, I' là các idêan của R và M là một R -môđun. Nếu $\sqrt{I} = \sqrt{I'}$ thì $H_I^i(M) = H_{I'}^i(M)$ với mọi $i \geq 0$.*

Định lý 1.3.5. *Với mỗi R -môđun M và mỗi $i \in \mathbb{N}$, ta có*

$$H_I^i(M) \cong \varinjlim_n \text{Ext}_R^i(R/I^n, M).$$

Một tính chất quan trọng liên quan đến môđun nội xạ được dưới đây.

Mệnh đề 1.3.6. *Cho R là vành Noether và E là một R -môđun nội xạ. Khi đó $\Gamma_I(E)$ cũng là một R -môđun nội xạ.*

Mệnh đề 1.3.7. *Các hàm tử $H_I^i(-)$ giao hoán với giới hạn thuận, tức là nếu $\{M_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ là một hệ thuận các R -môđun thì ta có đẳng cấu*

$$H_I^i(\varinjlim_\lambda M_\lambda) \cong \varinjlim_\lambda H_I^i(M_\lambda)$$

với mọi $i \geq 0$.

Đối với tính Artin của môđun đối đồng điều địa phương, ta có hai kết quả quan trọng sau đây.

Định lý 1.3.8. *Cho $(R, \mathfrak{m})$ là một vành địa phương và M là một R -môđun hữu hạn sinh. Khi đó $H_{\mathfrak{m}}^i(M)$ là Artin với mọi $i \geq 0$.*

Tiếp theo, ta có mối liên hệ giữa tính Artin của môđun đối đồng điều địa phương và chiều Krull.

Định lý 1.3.9. *Cho M là một R -môđun hữu hạn sinh với $\dim(M) = d$. Khi đó $H_I^d(M)$ là Artin.*

1.4 Đối đồng điều địa phương theo một cặp idêan

Định nghĩa 1.4.1. ([58]) Cho M là R -môđun và I, J là các idêan của vành R . Môđun con (I, J) -xoắn $\Gamma_{I,J}(M)$ của M được xác định bởi

$$\Gamma_{I,J}(M) = \{x \in M \mid I^n x \subseteq Jx \text{ với } n \gg 1\}.$$

Khi đó, $\Gamma_{I,J}$ là một hàm tử hiệp biến, R -tuyến tính và khớp trái từ phạm trù các R -môđun vào chính nó. Với mỗi $i \geq 0$, hàm tử dẫn xuất phải thứ i của $\Gamma_{I,J}$, kí hiệu $H_{I,J}^i$, được gọi là *hàm tử đối đồng điều địa phương thứ i theo cặp idêan (I, J)* . Chú ý rằng, nếu $J = 0$ thì $H_{I,J}^i$ trùng với hàm tử đối đồng điều địa phương H_I^i của Grothendieck.

Nếu $M = \Gamma_{I,J}(M)$ thì M được gọi là (I, J) -xoắn. Nếu $\Gamma_{I,J}(M) = 0$ thì ta nói M là (I, J) -xoắn-tự do. Các điều kiện tương đương của môđun (I, J) -xoắn được cho trong Bổ đề dưới đây.

Bổ đề 1.4.2. ([58, 1.7]) Cho M là một R -môđun. Các điều sau đây là tương đương

- (i) M là (I, J) -xoắn;
- (ii) $\text{Min}(M) \subseteq W(I, J)$;
- (iii) $\text{Supp}_R(M) \subseteq W(I, J)$;
- (iv) $\text{Ass}_R(M) \subseteq W(I, J)$.

Các tính chất cơ bản dưới đây của môđun $H_{I,J}^i(M)$ sẽ thường được sử dụng trong luận án.

Bổ đề 1.4.3. ([58, 1.13]) Cho M là một R -môđun.

- (i) Nếu M là (I, J) -xoắn thì $H_{I,J}^i(M) = 0$ với mọi $i > 0$.
- (ii) $H_{I,J}^i(\Gamma_{I,J}(M)) = 0$ với mọi $i > 0$.
- (iii) $M/\Gamma_{I,J}(M)$ là (I, J) -xoắn-tự do.
- (iv) $H_{I,J}^i(M) \cong H_{I,J}^i(M/\Gamma_{I,J}(M))$ với mọi $i > 0$.

(v) $H_{I,J}^i(M)$ là (I, J) -xoắn với mọi $i \geq 0$.

Môđun $H_{I,J}^i(M)$ có thể được tính thông qua giới hạn thuận của các môđun đối đồng điều địa phương theo một idêan mà ta sẽ thấy trong Định lí sau.

Định lý 1.4.4. ([58, 3.2]) Cho M là R -môđun. Khi đó

$$H_{I,J}^i(M) \cong \varinjlim_{\mathfrak{a} \in \tilde{W}(I,J)} H_{\mathfrak{a}}^i(M)$$

với mọi $i \geq 0$.

Các kết quả liên quan đến tính triệt tiêu, tính Artin của $H_{I,J}^i(M)$ cũng là những vấn đề quan trọng thường được nghiên cứu. Những kết quả đầu tiên về các tính chất này đã được trình bày trong [14, 58].

Dưới đây là những kết quả về tính Artin của môđun $H_{I,J}^i(M)$.

Bổ đề 1.4.5. Cho M là R -môđun. Ta có các điều sau:

- (i) ([14, 2.1]) Giả sử $(R, \mathfrak{m})$ là vành địa phương và M là một R -môđun hữu hạn sinh với $\dim(M) = d$. Khi đó $H_{I,J}^d(M)$ là Artin.
- (ii) ([14, 2.3]) Giả sử $(R, \mathfrak{m})$ là vành địa phương, M là một R -môđun hữu hạn sinh với $t = \dim(M/JM)$. Khi đó $H_{I,J}^t(M)/JH_{I,J}^t(M)$ là Artin.

1.5 Đối đồng điều địa phương suy rộng theo một cặp idêan

Bắt đầu chúng tôi xin nhắc lại những nội dung được trình bày trong [71]

Định nghĩa 1.5.1. Cho I là idêan của R và M, N là các R -môđun. Khi đó

$$H_I^i(M, N) = \varinjlim_n \text{Ext}_R^i(M/I^n M, N)$$

được gọi là môđun đối đồng điều địa phương suy rộng thứ i của M, N theo idêan I .

Mệnh đề 1.5.2. Cho M là R -môđun hữu hạn sinh, N là R -môđun bất kì. Khi đó $\Gamma_I(\text{Hom}(M, N)) = H_I^0(M, N) = \text{Hom}(M, \Gamma_I(N))$.

Mệnh đề 1.5.3. Cho M là R -môđun hữu hạn sinh, N là R -môđun I -xoắn. Khi đó $H_I^i(M, N) \cong \text{Ext}_R^i(M, N)$ với mọi $i \geq 0$.

Dưới đây, chúng ta sẽ tổng hợp lại một số kết quả liên quan đến tính triệt tiêu và không triệt tiêu của môđun $H_I^i(M, N)$.

Mệnh đề 1.5.4. Cho M, N là các R -môđun hữu hạn sinh với $\text{pd}(M) < \infty$.

- (i) ([57, 3.7]) Nếu $\dim(N) < \infty$ thì $H_I^i(M, N) = 0$ với mọi $i > \text{pd}(M) + \dim(M \otimes_R N)$.
- (ii) ([57, 2.5]) $H_I^i(M, N) = 0$ với mọi $i > \text{pd}(M) + \text{ara}(I)$, trong đó $\text{ara}(I)$ là hạng số học của I và được tính bằng số phần tử sinh nhỏ nhất của một idêan có căn bằng căn I .
- (iii) ([16, 3.1]) $H_I^i(M, N) = 0$ với mọi $i > \dim(R)$.
- (iv) ([57, 2.3]) Nếu $(R, \mathfrak{m})$ là một vành địa phương và $t = \text{depth}(N)$ thì $H_{\mathfrak{m}}^t(M, N) \neq 0$ và $H_{\mathfrak{m}}^i(M, N) = 0$ với mọi $i < t$.

Dưới đây là các kết quả liên quan đến tính Artin của môđun đối đồng điều địa phương suy rộng theo một idêan.

Mệnh đề 1.5.5. Cho M, N là các R -môđun hữu hạn sinh và $\text{pd}(M) < \infty$.

- (i) ([17, 2.2]) Nếu $(R, \mathfrak{m})$ là vành địa phương thì $H_{\mathfrak{m}}^i(M, N)$ là Artin với mọi $i \geq 0$.
- (ii) ([35, 2.9]) Nếu $\dim(N) < \infty$ thì $H_I^{\text{pd}(M) + \dim(N)}(M, N)$ là Artin.
- (iii) ([38, 2.6]) Nếu N là Artin (không nhất thiết hữu hạn sinh) thì $H_I^i(M, N)$ là Artin với mọi $i \geq 0$.
- (iv) ([16, 5.4]) $H_I^{\dim(R)}(M, N)$ là Artin.

Trước tiên chúng tôi nhắc lại định nghĩa của nhóm tác giả T.T.Nam, N.M.Tri và N.V.Dong về môđun đối đồng điều địa phương suy rộng thứ i theo một cặp idêan

Định nghĩa 1.5.6. ([40]) Cho các R -môđun M và N , ta kí hiệu $\Gamma_{I,J}(M, N)$ là môđun được xác định như sau

$$\Gamma_{I,J}(M, N) = \Gamma_{I,J}(\text{Hom}_R(M, N)).$$

Trong trường hợp đặc biệt nếu $M = R$ thì $\Gamma_{I,J}(R, N) \cong \Gamma_{I,J}(N)$ chính là môđun con (I, J) -xoắn của N . Chú ý rằng một phần tử $f \in \Gamma_{I,J}(M, N)$ nếu và chỉ nếu có một số nguyên dương $n > 0$ đủ lớn sao cho $I^n f(x) \subseteq Jf(x)$ với mọi $x \in M$.

Với mỗi R -môđun M , ta có $\Gamma_{I,J}(M, -)$ là hàm tử hiệp biến, khớp trái, R -tuyến tính từ phạm trù các R -môđun vào chính nó.

Ta kí hiệu $H_{I,J}^i(M, -)$ là hàm tử dẫn xuất phải thứ i của hàm tử $\Gamma_{I,J}(M, -)$ và gọi là *hàm tử đối đồng điều địa phương suy rộng thứ i theo cặp idêan (I, J)* .

Trong [66], Zamani đã đưa ra định nghĩa môđun đối đồng điều địa phương suy rộng $H_{I,J}^i(M, N)$ như sau

$$H_{I,J}^i(M, N) = H^i(\text{Hom}_R(M, \Gamma_{I,J}(E^\bullet)))$$

với $E^\bullet$ là một phép giải nội xạ của R -môđun N . Từ Mệnh đề 1.5.7, ta thấy định nghĩa trên trùng với Định nghĩa của Zamani khi M là một R -môđun hữu hạn sinh.

Trên đây là hai định nghĩa của hai nhóm tác giả khác nhau, vào những thời điểm khác nhau nhưng thực tế là trùng nhau.

Mệnh đề 1.5.7. *Cho M là R -môđun hữu hạn sinh và N là R -môđun. Khi đó*

$$\Gamma_{I,J}(M, N) = \text{Hom}_R(M, \Gamma_{I,J}(N)).$$

Một kết quả liên quan đến tập các idêan nguyên tố liên kết của $\Gamma_{I,J}(M, N)$ được suy ra từ Mệnh đề 1.5.7. Mệnh đề tiếp theo là một sự mở rộng của [58, 1.4].

Mệnh đề 1.5.8. ([40, 2.1]) *Cho M là R -môđun hữu hạn sinh và N là R -môđun tùy ý. Cho I, I', J, J' là các idêan của R . Khi đó*

$$(i) \quad \Gamma_{I,J}(\Gamma_{I',J'}(M, N)) = \Gamma_{I',J'}(\Gamma_{I,J}(M, N)).$$

- (ii) Nếu $I \subseteq I'$ thì $\Gamma_{I,J}(M, N) \supseteq \Gamma_{I',J}(M, N)$.
- (iii) Nếu $J \subseteq J'$ thì $\Gamma_{I,J}(M, N) \subseteq \Gamma_{I,J'}(M, N)$.
- (iv) $\Gamma_{I,J}(\Gamma_{I',J}(M, N)) = \Gamma_{I+I',J}(M, N)$.
- (v) $\Gamma_{I,J}(\Gamma_{I,J'}(M, N)) = \Gamma_{I,JJ'}(M, N) = \Gamma_{I,J \cap J'}(M, N)$. Hơn nữa, $H_{I,JJ'}^i(M, N) = H_{I,J \cap J'}^i(M, N)$ với mọi i .
- (vi) Nếu $J' \subseteq J$ thì $\Gamma_{I+J',J}(M, N) = \Gamma_{I,J}(M, N)$. Hơn nữa, $\Gamma_{I+J,J}(M, N) = \Gamma_{I,J}(M, N)$ và $H_{I+J,J}^i(M, N) = H_{I,J}^i(M, N)$ với mọi i .
- (vii) Nếu $\sqrt{I} = \sqrt{I'}$ thì $H_{I,J}^i(M, N) = H_{I',J}^i(M, N)$ với mọi i . Đặc biệt, $H_{I,J}^i(M, N) = H_{\sqrt{I},J}^i(M, N)$ với mọi i .
- (viii) Nếu $\sqrt{J} = \sqrt{J'}$ thì $H_{I,J}^i(M, N) = H_{I,J'}^i(M, N)$ với mọi i .

Ta đã biết rằng $H_I^i(M, N) \cong \text{Ext}_R^i(M, N)$ khi N là R -môđun I -xoắn. Mệnh đề tiếp theo là một kết quả tương tự trong trường hợp N là (I, J) -xoắn.

Mệnh đề 1.5.9. ([40, 1.1]) Cho N là R -môđun (I, J) -xoắn. Khi đó $H_{I,J}^i(M, N) \cong \text{Ext}_R^i(M, N)$ với mọi $i \geq 0$.

Mệnh đề 1.5.10. ([40, 1.2]) Nếu N là R -môđun J -xoắn thì $H_{I,J}^i(M, N) \cong H_I^i(M, N)$ với mọi $i \geq 0$.

Chương 2

Môđun Lasker yếu và đối đồng điều địa phương theo một cặp idêan

Chương 2 nghiên cứu về các mối liên hệ giữa các đối đồng điều địa phương và một số tính chất của các môđun đối đồng điều địa phương như: Tính Lasker yếu, tính đối Lasker yếu, tính hữu hạn, tính đối hữu hạn và tính hữu hạn yếu. Nội dung có được của chương này là những kết quả mới của tác giả và nhóm nghiên cứu đã được đăng trong các bài báo [46, 47, 62]. Trong mục này, chúng tôi giới thiệu về các môđun (I, J) -đối Lasker yếu và nghiên cứu các tính chất liên quan với các môđun đối đồng điều địa phương theo một cặp idêan. Hơn nữa, chúng tôi đã nghiên cứu về các tính chất của các môđun đối đồng điều địa phương có giá chứa trong $\text{Max}(R)$ và mối quan hệ về tính Artin yếu của các môđun $H_{I,J}^i(M)$ và $H_I^i(M)$. Năm 2014, Abbasi, H. Roshan-Shekalguorabia và Rasht in [1] đã giới thiệu về một lớp Serre mới của các R -môđun chứa lớp các môđun Lasker yếu và lớp các R -môđun I -minimax. Chúng tôi đã định nghĩa M là một R -môđun I -Lasker yếu nếu bất kỳ môđun con N của M khi đó tập hợp $\text{Ass}_R(\Gamma_I(M/N))$ là hữu hạn, và đưa ra một số tính chất của các môđun I -Lasker yếu. Chúng tôi đã giới thiệu về các môđun (I, J) -đối Lasker yếu. Một R -môđun M được gọi là R -module (I, J) -đối Lasker yếu nếu $\text{Supp}_R(M) \subseteq W(I, J)$ và $\text{Ext}_R^i(R/I, M)$ là J -Lasker yếu với mọi $i \geq 0$, khi $W(I, J) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(R) \mid I^n \subseteq \mathfrak{p} + J \text{ cho một số nguyên } n \geq 0\}$. Mục đích của chúng tôi trong phần này là giới thiệu thêm về các môđun (I, J) -đối Lasker yếu và nghiên cứu các tính chất liên quan của chúng đối với các môđun đối đồng điều địa phương theo một cặp idêan.

2.1 Tính Lasker yếu của đối đồng điều địa phương theo một cặp idêan

Định nghĩa 2.1.1 ([18]). Một R -môđun M được gọi là *Lasker yếu* nếu tập các idêan nguyên tố liên kết của bất kì môđun thương nào của M đều hữu hạn.

Bổ đề 2.1.2. ([18, Mệnh đề 2.3])

- (i) Cho $0 \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow 0$ là một dãy khớp ngắn các R -môđun. Khi đó M là Lasker yếu nếu và chỉ nếu L và N đều là Lasker yếu. Do đó môđun thương cũng như tổng trực tiếp của hữu hạn các môđun Lasker yếu cũng là Lasker yếu.
- (ii) Cho M và N là các R -môđun. Nếu M là Lasker yếu và N hữu hạn sinh thì $\text{Ext}_R^i(N, M)$ và $\text{Tor}_i^R(N, M)$ đều là Lasker yếu với mọi $i \geq 0$.

Định nghĩa 2.1.3. [1, 2.1] Một R -môđun M được gọi là J -Lasker yếu nếu tập idêan nguyên tố liên kết của các môđun con $\Gamma_J(M/N)$ của bất kỳ môđun thương M/N đều là hữu hạn; hay nếu cho bất kỳ môđun con N của M thì tập $\text{Ass}_R(\Gamma_J(M/N))$ là hữu hạn.

Bổ đề 2.1.4. [1] Các điều khẳng định sau đây là đúng

- (i) Lớp của các môđun J -Lasker yếu là đóng với việc lấy môđun con, thương và mở rộng hay nó là một phạm trù con Serre của phạm trù các môđun. Đặc biệt, bất kỳ tổng hữu hạn của các môđun J -Lasker yếu là J -Lasker yếu.
- (ii) Cho M và N là các R -môđun. Nếu M là hữu hạn sinh và N là J -Lasker yếu thì $\text{Ext}_R^i(M, N)$ và $\text{Tor}_i^R(M, N)$ là các J -Lasker yếu với mọi $i \geq 0$.
- (iii) Nếu M là R -môđun J -Lasker yếu thì $\Gamma_J(M)$ là Lasker yếu.

Định nghĩa 2.1.5. Một R -môđun M được gọi là (I, J) -đối Lasker yếu nếu $\text{Supp}_R(M) \subseteq W(I, J)$ và $\text{Ext}_R^i(R/I, M)$ là một J -Lasker yếu với mọi $i \geq 0$.

Lớp các R -môđun (I, J) -đối Lasker yếu là lớn hơn lớp các R -môđun (I, J) -đối hữu hạn.

Mệnh đề 2.1.6. Cho $0 \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow 0$ là một dãy khớp ngắn. Nếu có hai môđun là (I, J) -đối Lasker yếu thì môđun còn lại cũng vậy.

Chứng minh. Từ dãy khớp ngắn $0 \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow 0$ cảm sinh ra dãy khớp dài sau

$$\cdots \rightarrow \text{Ext}_R^i(R/I, L) \rightarrow \text{Ext}_R^i(R/I, M) \rightarrow \text{Ext}_R^i(R/I, N) \rightarrow \cdots.$$

Lưu ý rằng $\text{Supp}_R(M) = \text{Supp}_R(L) \cup \text{Supp}_R(N)$. Từ [1, 2.2], ta có điều phải chứng minh. $\square$

Mệnh đề 2.1.7. Cho M là R -môđun và t là số nguyên không âm sao cho $H_{I,J}^i(M)$ là (I, J) -đối Lasker yếu với mọi $i \leq t$. Khi đó $\text{Ext}_R^i(R/I, M)$ là J -Lasker yếu với mọi $i \leq t$.

Chứng minh. Bằng cách chứng minh quy nạp theo t . Khi $t = 0$, vì $H_{I,J}^0(M)$ là (I, J) -đối Lasker yếu nên $\text{Hom}_R(R/I, H_{I,J}^0(M))$ là J -Lasker yếu. Trong trường hợp này, kết luận hoàn toàn đúng từ đẳng cấu

$$\text{Hom}_R(R/I, H_{I,J}^0(M)) \cong \text{Hom}_R(R/I, M).$$

Cho $t > 0$, dãy khớp ngắn

$$0 \rightarrow \Gamma_{I,J}(M) \rightarrow M \rightarrow M/\Gamma_{I,J}(M) \rightarrow 0$$

cảm sinh ra dãy khớp dài

$$\cdots \rightarrow \text{Ext}_R^i(R/I, \Gamma_{I,J}(M)) \rightarrow \text{Ext}_R^i(R/I, M) \rightarrow \text{Ext}_R^i(R/I, M/\Gamma_{I,J}(M)) \rightarrow \cdots.$$

Vì $\Gamma_{I,J}(M)$ là một (I, J) -đối Lasker yếu R -môđun nên $\text{Ext}_R^i(R/I, \Gamma_{I,J}(M))$ là J -Lasker yếu với mọi $i \geq 0$. Việc chứng minh sẽ hoàn toàn đầy đủ bằng cách chỉ ra $\text{Ext}_R^i(R/I, M/\Gamma_{I,J}(M))$ là J -Lasker yếu với mọi $i \leq t$. Lưu ý rằng $H_{I,J}^i(M) \cong H_{I,J}^i(M/\Gamma_{I,J}(M))$ với mọi $i > 0$. Cho $\overline{M} = M/\Gamma_{I,J}(M)$ và E là bao nội xạ của $\overline{M}$ và $L = E/\overline{M}$. Từ dãy khớp ngắn

$$0 \rightarrow \overline{M} \rightarrow E \rightarrow L \rightarrow 0$$

tồn tại một đẳng cấu

$$H_{I,J}^i(L) \cong H_{I,J}^{i+1}(\overline{M}) \text{ and } \text{Ext}_R^i(R/I, L) \cong \text{Ext}_R^{i+1}(R/I, \overline{M})$$

với mọi $i \geq 0$. Theo giả thiết, $H_{I,J}^i(L)$ là (I, J) -đối Lasker yếu với mọi $i \leq t-1$. Từ giả thiết quy nạp ta suy ra $\text{Ext}_R^i(R/I, L)$ là J -Lasker yếu với mọi $i \leq t-1$. Từ đây cho ta kết quả $\text{Ext}_R^i(R/I, \overline{M})$ là J -Lasker yếu với mọi $i \leq t$. $\square$

Hệ quả 2.1.8. Cho M là R -môđun sao cho $H_{I,J}^i(M)$ là (I, J) -đối Lasker yếu với mọi $i \geq 0$. Khi đó $\text{Ext}_R^i(R/I, M)$ là J -Lasker yếu với mọi $i \geq 0$.

Định lý 2.1.9. Cho M là R -môđun và n là số nguyên không âm sao cho $H_{I,J}^i(M)$ là (I, J) -đối Lasker yếu với mọi $i < n$. Khi đó:

- (i) Nếu $\text{Ext}_R^n(R/I, M)$ là J -Lasker yếu thì $\text{Hom}_R(R/I, H_{I,J}^n(M))$ là J -Lasker yếu.
- (ii) Nếu $\text{Ext}_R^{n+1}(R/I, M)$ là J -Lasker yếu thì $\text{Ext}_R^1(R/I, H_{I,J}^n(M))$ là J -Lasker yếu.
- (iii) Giả sử rằng $\text{Ext}_R^{n+1}(R/I, M)$ và $\text{Ext}_R^{n+2}(R/I, M)$ là J -Lasker yếu. Khi đó $\text{Hom}_R(R/I, H_{I,J}^{n+1}(M))$ là J -Lasker yếu nếu và chỉ nếu $\text{Ext}_R^2(R/I, H_{I,J}^n(M))$ là J -Lasker yếu.

Chứng minh. Cho $F = \text{Hom}_R(R/I, -)$ và $G = \Gamma_{I,J}(-)$ là các hàm tử từ phạm trù các R -môđun vào chính nó. Khi đó $FG(M) = \text{Hom}_R(R/I, M)$. Nếu E là R -môđun nội xạ thì $R^i F(G(E)) = 0$ với mọi $i > 0$. Theo [52, 10.47] ta có dãy phổ

$$E_2^{p,q} = \text{Ext}_R^p(R/I, H_{I,J}^q(M)) \Rightarrow_p \text{Ext}_R^{p+q}(R/I, M).$$

Theo giả thiết, $E_2^{p,q}$ là J -Lasker yếu với mọi $p \geq 0, q < n$. Cho t là số nguyên không âm, khi đó tồn tại lọc Φ các môđun con của $H^t = \text{Ext}_R^t(R/I, M)$

$$0 = \Phi^{t+1} H^t \subseteq \Phi^t H^t \subseteq \dots \subseteq \Phi^1 H^t \subseteq \Phi^0 H^t = H^t$$

sao cho

$$E_\infty^{i,t-i} \cong \Phi^i H^t / \Phi^{i+1} H^t$$

với mọi $0 \leq i \leq t$.

(i) Vì $H^n = \text{Ext}_R^n(R/I, M)$ là J -Lasker yếu nên $E_\infty^{i,n-i}$ là J -Lasker yếu với mọi $0 \leq i \leq n$. Mặt khác, ta có

$$E_\infty^{0,n} = E_{n+1}^{0,n} = \text{Ker}(E_n^{0,n} \rightarrow E_n^{n,1}).$$

Vì $E_n^{n,1}$ là thương con của $E_2^{n,1}$ nên theo giả thiết $E_n^{n,1}$ là J -Lasker yếu. Từ đây suy ra $E_n^{0,n}$ là J -Lasker yếu. Bằng cách giải thích tương tự, ta có thể kết luận $E_{n-1}^{0,n}, E_{n-2}^{0,n}, \dots, E_2^{0,n}$ là các môđun J -Lasker yếu. Trong trường hợp đặc biệt, $\text{Hom}_R(R/I, H_{I,J}^n(M)) = E_2^{0,n}$ là J -Lasker yếu.

(ii) Ta xét đồng cấu dãy phổ sau

$$0 \rightarrow E_r^{1,n} \rightarrow E_r^{1+r,n-r+1}$$

với mọi $r \geq 2$. Ta thấy rằng $E_{n+2}^{1,n} = E_{n+3}^{1,n} = \dots = E_\infty^{1,n}$ và $E_\infty^{1,n}$ là thương con của $\text{Ext}_R^{n+1}(R/I, M)$. Theo giả thiết, $E_{n+2}^{1,n}$ và $E_r^{r+1,n-r+1}$ là các J -Lasker yếu với mọi $r \geq 2$. Mặt khác, vì $E_{r+1}^{1,n} = \text{Ker}(E_r^{1,n} \rightarrow E_r^{r+1,n-r+1})$, suy ra $E_r^{1,n}$ là J -Lasker yếu với mọi $r \geq 2$.

(iii) Ta xét các đồng cấu dãy phổ sau

$$0 \rightarrow E_2^{0,n+1} \xrightarrow{d_2^{0,n+1}} E_2^{2,n} \xrightarrow{d_2^{2,n}} E_2^{4,n-1}$$

và

$$0 \rightarrow E_r^{2,n} \xrightarrow{d_r^{2,n}} E_r^{r+2,n-r+1}$$

với mọi $r \geq 3$. Lưu ý rằng $E_{n+2}^{2,n} = E_{n+3}^{2,n} = \dots = E_\infty^{2,n} \cong \Phi^2 H^{n+2} / \Phi^3 H^{n+2}$. Hơn nữa, theo giả thiết $H^{n+2} = \text{Ext}_R^{n+2}(R/I, M)$ và $E_r^{r+2,n-r+1}$ là J -Lasker yếu với mọi $r \geq 3$. Suy ra $E_3^{2,n}$ là J -Lasker yếu. Khi đó $E_2^{2,n}$ là J -Lasker yếu nếu và chỉ nếu $\text{Ker} d_2^{2,n}$ là J -Lasker yếu. Vì $E_3^{2,n} = \text{Ker} d_2^{2,n} / \text{Im} d_2^{0,n+1}$, suy ra $\text{Ker} d_2^{2,n}$ là J -Lasker yếu nếu và chỉ nếu $\text{Im} d_2^{0,n+1}$ là J -Lasker yếu nếu và chỉ nếu $E_2^{0,n+1}$ là J -Lasker yếu, và ta có điều phải chứng minh. $\square$

Chúng ta sẽ tìm các điều kiện sao cho môđun $H_{I,J}^i(M)$ là (I, J) -đối Lasker yếu với mọi $i \geq 0$.

Định lý 2.1.10. Cho M là R -môđun sao cho $\text{Ext}_R^i(R/I, M)$ là J -Lasker yếu với mọi $i \geq 0$. Nếu n là số nguyên không âm sao cho $H_{I,J}^i(M)$ là (I, J) -đối Lasker yếu với mọi $i \neq n$ thì $H_{I,J}^n(M)$ là (I, J) -đối Lasker yếu.

Chứng minh. Chúng ta sẽ chứng minh bằng quy nạp theo n . Khi $n = 0$ và $\overline{M} = M/\Gamma_{I,J}(M)$. Vì $H_{I,J}^i(M) \cong H_{I,J}^i(\overline{M})$ với mọi $i > 0$ và $\Gamma_{I,J}(\overline{M}) = 0$ nên từ giả

thiết ta suy ra $H_{I,J}^i(\overline{M})$ là (I, J) -đối Lasker yếu với mọi $i \geq 0$. Theo Hệ quả 2.1.8, $\text{Ext}_R^i(R/I, \overline{M})$ là J -Lasker yếu với mọi $i \geq 0$. Từ dãy khớp

$$\cdots \text{Ext}_R^i(R/I, \Gamma_{I,J}(M)) \rightarrow \text{Ext}_R^i(R/I, M) \rightarrow \text{Ext}_R^i(R/I, \overline{M}) \cdots$$

theo giả thiết ta có $\text{Ext}_R^i(R/I, H_{I,J}^0(M))$ là J -Lasker yếu với mọi $i \geq 0$. Do đó $H_{I,J}^0(M)$ là (I, J) -đối Lasker yếu.

Bây giờ cho $n > 0$ và điều khẳng định là đúng với mọi $i < n$. Cho E là bao nội xạ của $\overline{M}$ và $L = E/\overline{M}$. Từ dãy khớp ngắn

$$0 \rightarrow \overline{M} \rightarrow E \rightarrow L \rightarrow 0$$

cho ta các đẳng cấu

$$H_{I,J}^i(L) \cong H_{I,J}^{i+1}(\overline{M}) \text{ và } \text{Ext}_R^i(R/I, L) \cong \text{Ext}_R^{i+1}(R/I, \overline{M})$$

với mọi $i \geq 0$. Theo giả thiết, $H_{I,J}^i(L)$ là (I, J) -đối Lasker yếu với mọi $i \neq n-1$ và $\text{Ext}_R^i(R/I, L)$ là J -Lasker yếu với mọi $i \geq 0$. Từ giả thiết quy nạp ta suy ra $H_{I,J}^{n-1}(L)$ là (I, J) -đối Lasker yếu. Do đó $H_{I,J}^n(\overline{M})$ là (I, J) -đối Lasker yếu và ta có điều phải chứng minh. $\square$

Hệ quả 2.1.11. Cho M là R -môđun J -Lasker yếu và n là một số nguyên không âm sao cho $H_{I,J}^i(M)$ là (I, J) -đối Lasker yếu với mọi $i < n$. Giả sử rằng N là một môđun con J -Lasker yếu của $H_{I,J}^n(M)$ sao cho $\text{Ext}_R^1(R/I, N)$ là J -Lasker yếu. Khi đó $\text{Hom}_R(R/I, H_{I,J}^n(M)/N)$ là J -Lasker yếu.

Chứng minh. Từ dãy khớp ngắn

$$0 \rightarrow N \rightarrow H_{I,J}^n(M) \rightarrow H_{I,J}^n(M)/N \rightarrow 0$$

cảm sinh ra dãy khớp

$$\text{Hom}_R(R/I, H_{I,J}^n(M)) \rightarrow \text{Hom}_R(R/I, H_{I,J}^n(M)/N) \rightarrow \text{Ext}_R^1(R/I, N).$$

Theo giả thiết và Định lý 2.1.9, ta suy ra $\text{Hom}_R(R/I, H_{I,J}^n(M)/N)$ là J -Lasker yếu và ta có điều phải chứng minh. $\square$

2.2 Tính hữu hạn của đối đồng điều địa phương theo một cặp idêan

Định nghĩa 2.2.1 ([20]). Một R -môđun M được gọi là I -đối hữu hạn nếu $\text{Supp}_R(M) \subseteq V(I)$ và $\text{Ext}_R^i(R/I, M)$ là hữu hạn với mọi $i \geq 0$.

Định nghĩa 2.2.2 ([20]). Một R -môđun M được gọi là I -đối hữu hạn yếu nếu $\text{Supp}_R(M) \subseteq V(I)$ và $\text{Ext}_R^i(R/I, M)$ là Lasker yếu với mọi $i \geq 0$.

Ta thấy rằng các môđun I -đối hữu hạn đều là các môđun I -đối hữu hạn yếu.

Định nghĩa 2.2.3 ([60]). Một R -môđun M được gọi là (I, J) -đối hữu hạn nếu $\text{Supp}_R(M) \subseteq W(I, J)$ và $\text{Ext}_R^i(R/I, M)$ hữu hạn sinh với mọi $i \geq 0$.

Định nghĩa tiếp theo là một sự mở rộng của các khái niệm môđun (I, J) -đối hữu hạn và môđun I -đối hữu hạn yếu.

Định nghĩa 2.2.4. Một R -môđun M được gọi là (I, J) -đối hữu hạn yếu nếu $\text{Supp}_R(M) \subseteq W(I, J)$ và $\text{Ext}_R^i(R/I, M)$ là Lasker yếu với mọi $i \geq 0$.

Từ Định nghĩa 2.2.4, ta có ngay hệ quả sau.

Hệ quả 2.2.5. (i) *Mỗi môđun (I, J) -đối hữu hạn đều là (I, J) -đối hữu hạn yếu.*

(ii) *Nếu $\text{Supp}_R(M) \subseteq W(I, J)$ và M là Lasker yếu thì M là (I, J) -đối hữu hạn yếu.*

(iii) *Cho $0 \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow 0$ là một dãy khớp ngắn các R -môđun và các R -đồng cấu. Nếu hai trong ba môđun là (I, J) -đối hữu hạn yếu thì môđun thứ ba cũng là (I, J) -đối hữu hạn yếu.*

Chứng minh. (i) Giả sử M là R -môđun (I, J) -đối hữu hạn. Khi đó $\text{Supp}_R(M) \subseteq W(I, J)$ và $\text{Ext}_R^i(R/I, M)$ hữu hạn sinh với mọi $i \geq 0$. Do đó $\text{Ext}_R^i(R/I, M)$ là Lasker yếu với mọi $i \geq 0$.

(ii) Theo Bổ đề 2.1.2(ii), $\text{Ext}_R^i(R/I, M)$ là Lasker yếu với mọi $i \geq 0$.

(iii) Từ dãy khớp ngắn, ta có

$$\text{Supp}_R(M) = \text{Supp}_R(L) \cup \text{Supp}_R(N)$$

và một dãy khớp dài

$$\cdots \rightarrow \text{Ext}_R^i(R/I, L) \rightarrow \text{Ext}_R^i(R/I, M) \rightarrow \text{Ext}_R^i(R/I, N) \rightarrow \cdots.$$

Khi đó áp dụng Định nghĩa 2.2.4 ta có được điều phải chứng minh. $\square$

Chú ý rằng các môđun hữu hạn sinh hay môđun có giá hữu hạn đều là các môđun Lasker yếu. Lớp các R -môđun (I, J) -đối Lasker yếu là lớn hơn lớp các R -môđun (I, J) -đối hữu hạn.

Hệ quả 2.2.6. *Cho M là R -môđun hữu hạn sinh và t là số nguyên không âm. Nếu $H_{I,J}^i(M)$ là hữu hạn sinh hoặc $\text{Supp}_R(H_{I,J}^i(M))$ là tập hữu hạn với mọi $i < t$ thì $\text{Ass}_R(\text{Hom}_R(R/I, H_{I,J}^t(M)))$ là hữu hạn.*

Định lý 2.2.7. *Cho M là R -môđun và d là số nguyên không âm sao cho $H_{I,J}^i(M)$ là (I, J) -đối hữu hạn yếu với mọi $i \leq d$. Khi đó $\text{Ext}_R^i(R/I, M)$ là Lasker yếu với mọi $i \leq d$.*

Chứng minh. Ta sẽ chứng minh quy nạp theo d . Khi $d = 0$, dãy khớp ngắn

$$0 \rightarrow \Gamma_{I,J}(M) \rightarrow M \rightarrow M/\Gamma_{I,J}(M) \rightarrow 0$$

cảm sinh dãy khớp

$$0 \rightarrow \text{Hom}_R(R/I, \Gamma_{I,J}(M)) \rightarrow \text{Hom}_R(R/I, M) \rightarrow \text{Hom}_R(R/I, M/\Gamma_{I,J}(M)).$$

Vì $M/\Gamma_{I,J}(M)$ là R -môđun (I, J) -xoắn-tự do nên nó cũng là I -xoắn-tự do và do đó $\text{Hom}_R(R/I, M/\Gamma_{I,J}(M)) = 0$. Suy ra

$$\text{Hom}_R(R/I, M) \cong \text{Hom}_R(R/I, \Gamma_{I,J}(M)).$$

Như vậy $\text{Hom}_R(R/I, M)$ là R -môđun Lasker yếu.

Giả sử $d > 0$. Ta có $H_{I,J}^i(M) \cong H_{I,J}^i(M/\Gamma_{I,J}(M))$ với mọi $i > 0$ theo Bổ đề 1.4.3(iv). Đặt $\overline{M} = M/\Gamma_{I,J}(M)$ và $E(\overline{M})$ là bao nội xạ của $\overline{M}$. Từ dãy khớp ngắn

$$0 \rightarrow \overline{M} \rightarrow E(\overline{M}) \rightarrow E(\overline{M})/\overline{M} \rightarrow 0$$

ta được các đẳng cấu

$$\text{Ext}_R^i(R/I, E(\overline{M})/\overline{M}) \cong \text{Ext}_R^{i+1}(R/I, \overline{M})$$

và

$$H_{I,J}^i(E(\overline{M})/\overline{M}) \cong H_{I,J}^{i+1}(\overline{M})$$

với $i \geq 0$. Từ giả thiết suy ra $H_{I,J}^i(E(\overline{M})/\overline{M})$ là (I, J) -đối hữu hạn yếu với mọi $i \leq d-1$. Theo giả thiết quy nạp, $\text{Ext}_R^i(R/I, E(\overline{M})/\overline{M})$ là Lasker yếu với mọi $i \leq d-1$ và do đó $\text{Ext}_R^i(R/I, \overline{M})$ cũng là Lasker yếu với mọi $i \leq d$. Dãy khớp ngắn

$$0 \rightarrow \Gamma_{I,J}(M) \rightarrow M \rightarrow \overline{M} \rightarrow 0$$

cảm sinh dãy khớp dài

$$\cdots \rightarrow \text{Ext}_R^i(R/I, \Gamma_{I,J}(M)) \rightarrow \text{Ext}_R^i(R/I, M) \rightarrow \text{Ext}_R^i(R/I, \overline{M}) \rightarrow \cdots$$

Vì $\Gamma_{I,J}(M)$ là (I, J) -đối hữu hạn yếu nên $\text{Ext}_R^i(R/I, \Gamma_{I,J}(M))$ là Lasker yếu với mọi $i \geq 0$. Cuối cùng, từ dãy khớp dài suy ra $\text{Ext}_R^i(R/I, M)$ là Lasker yếu với mọi $i \leq d$. $\square$

Định lý 2.2.8. Cho M là R -môđun sao cho $\text{Ext}_R^i(R/I, M)$ là Lasker yếu với mọi i và t là một số nguyên không âm. Nếu $H_{I,J}^t(M)$ là (I, J) -đối hữu hạn yếu với mọi $i \neq t$ thì $H_{I,J}^t(M)$ cũng là (I, J) -đối hữu hạn yếu.

Chứng minh. Ta chứng minh quy nạp theo t . Khi $t = 0$, đặt $\overline{M} = M/\Gamma_{I,J}(M)$, dãy khớp ngắn

$$0 \rightarrow \Gamma_{I,J}(M) \rightarrow M \rightarrow \overline{M} \rightarrow 0$$

cảm sinh một dãy khớp dài

$$\cdots \rightarrow \text{Ext}_R^i(R/I, \Gamma_{I,J}(M)) \rightarrow \text{Ext}_R^i(R/I, M) \rightarrow \text{Ext}_R^i(R/I, \overline{M}) \rightarrow \cdots$$

Ta có $H_{I,J}^i(\overline{M}) \cong H_{I,J}^i(M)$ với mọi $i > 0$ và $H_{I,J}^0(\overline{M}) = 0$. Từ giả thiết, ta có $H_{I,J}^i(\overline{M})$ là (I, J) -đối hữu hạn yếu với mọi $i \geq 0$. Áp dụng Định lý 2.2.7 ta suy ra rằng $\text{Ext}_R^i(R/I, \overline{M})$ là Lasker yếu với mọi $i \geq 0$. Do đó, từ dãy khớp dài và giả thiết cho ta $\text{Ext}_R^i(R/I, \Gamma_{I,J}(M))$ là Lasker yếu. Như vậy $H_{I,J}^0(M)$ là (I, J) -đối hữu hạn yếu.

Khi $t > 0$. Dãy khớp ngắn

$$0 \rightarrow \overline{M} \rightarrow E(\overline{M}) \rightarrow E(\overline{M})/\overline{M} \rightarrow 0$$

cho cảm sinh các đẳng cấu

$$\text{Ext}_R^i(R/I, E(\overline{M})/\overline{M}) \cong \text{Ext}_R^{i+1}(R/I, \overline{M})$$

và

$$H_{I,J}^i(E(\overline{M})/\overline{M}) \cong H_{I,J}^{i+1}(\overline{M})$$

với mọi $i \geq 0$. Khi đó $H_{I,J}^i(E(\overline{M})/\overline{M})$ là (I, J) -đối hữu hạn yếu với mọi $i \neq t-1$. Lưu ý rằng $\text{Ext}_R^i(R/I, \Gamma_{I,J}(M))$ là Lasker yếu và do đó $\text{Ext}_R^i(R/I, E(\overline{M})/\overline{M})$ là Lasker yếu với mọi $i \geq 0$. Theo giả thiết quy nạp, $H_{I,J}^{t-1}(E(\overline{M})/\overline{M})$ là (I, J) -đối hữu hạn yếu. Như vậy $H_{I,J}^t(M)$ là (I, J) -đối hữu hạn yếu. $\square$

Kết hợp Bổ đề 2.1.2(ii) với Định lý 2.2.8, ta được hệ quả sau.

Hệ quả 2.2.9. *Cho M là R -môđun Lasker yếu và t là số nguyên không âm. Nếu $H_{I,J}^i(M)$ là (I, J) -đối hữu hạn yếu với mọi $i \neq t$ thì $H_{I,J}^t(M)$ cũng là (I, J) -đối hữu hạn yếu.*

Hệ quả 2.2.10. *Cho I là ideal chính của R và M là R -môđun Lasker yếu. Khi đó $H_{I,J}^i(M)$ là (I, J) -đối hữu hạn yếu với mọi $i \geq 0$.*

Chứng minh. Từ [58, 4.11] suy ra rằng $H_{I,J}^i(M) = 0$ với mọi $i > 1$. Mặt khác, $H_{I,J}^0(M)$ là một R -môđun Lasker yếu vì $H_{I,J}^0(M)$ là một môđun con của M . Điều này cho thấy $H_{I,J}^i(M)$ là (I, J) -đối hữu hạn yếu với mọi $i \neq 1$. Từ Định lý 2.2.8, ta có điều phải chứng minh. $\square$

Chương 3

Tính Artin và Artin yếu của môđun đối đồng điều địa phương theo một cặp idêan

Tính chất Artin của các môđun đóng vai trò quan trọng khi nghiên cứu về cấu trúc của vành giao hoán và được giới thiệu bởi các tác giả Emil Artin, Emmy Noether và David Hilbert từ những năm 1890. Hiện nay, tính chất Artin của các môđun là một trong những chủ đề được nhiều nhà khoa học quan tâm khi nghiên cứu về các đối đồng điều địa phương trong lý thuyết vành giao hoán như: Matsumura [33] năm 1890; Matsumura [34] năm 1986; Chu và Tang [13] năm 2007; Payrovi và Parsa [48] năm 2012; Tang [59] năm 2012; Gu [23] năm 2013. Qua suốt quá trình nghiên cứu, tác giả và nhóm nghiên cứu gồm T.T.Nam, N.M.Trí, N.T.Nam đã chứng minh thành công một số kết quả về tính Artin của các đối đồng điều địa phương và đã được đăng trong các bài báo [62], [46] năm 2019. Qua suốt quá trình nghiên cứu, tác giả và nhóm nghiên cứu gồm T.T.Nam, N.M.Trí, N.T.Nam đã đăng một số kết quả về tính Artin trong các bài báo [45, 47, 62]. Chương 3, tác giả cụ thể hóa các kết quả đạt được về tính Artin của các đối đồng điều địa phương theo một cặp idêan, đối đồng điều địa phương suy rộng theo một cặp idêan. Chúng tôi cũng có được một số kết quả về tính Artin yếu của các môđun $H_{I,J}^i(M)$. Đặc biệt, trong chương này chúng tôi tập trung nghiên cứu về tính Artin yếu của đối đồng điều địa phương theo một cặp idêan và tính Artin của $H_{I,J}^i(M, N)$.

3.1 Tính Artin yếu của đối đồng điều địa phương theo một cặp idêan

Định lý sau sẽ cho ta một số kết quả liên quan về tính Artin của các môđun đối đồng điều địa phương. Như chúng ta đã biết, nếu M là hữu hạn sinh với $\dim M = d$ thì môđun $H_{I,J}^d(M)$ là Artin. Trong phần này, chúng tôi mở rộng kết quả này trong trường hợp khi M là Lasker yếu.

Định lý 3.1.1. *Cho $(R, \mathfrak{m})$ là vành địa phương và M là R -môđun Lasker yếu sao cho $\dim M = d < \infty$. Khi đó*

- (i) *Nếu $d > 1$ thì $H_{I,J}^d(M)$ là Artin.*
- (ii) *Nếu $d \leq 1$ thì $\text{Supp}_R(H_{I,J}^d(M))$ là hữu hạn.*
- (iii) *$\text{Supp}_R(H_{I,J}^{d-1}(M)/JH_{I,J}^{d-1}(M))$ là hữu hạn.*

Chứng minh. (i) Theo kết quả của [7, 3.3], tồn tại một môđun con hữu hạn sinh N của M sao cho $\text{Supp}_R(M/N)$ là tập hữu hạn và $\dim(M/N) \leq 1$. Từ dãy khớp ngắn

$$0 \rightarrow N \rightarrow M \rightarrow M/N \rightarrow 0$$

cho chúng ta một dãy khớp dài sau

$$\cdots \rightarrow H_{I,J}^i(N) \rightarrow H_{I,J}^i(M) \rightarrow H_{I,J}^i(M/N) \rightarrow \cdots$$

Lưu ý rằng $H_{I,J}^i(M/N) = 0$ với mọi $i > 1$ và $H_{I,J}^i(N) \cong H_{I,J}^i(M)$ với mọi $i > 2$, với N là môđun con hữu hạn sinh của M

Nếu $\dim M > 1$ thì $\dim M = \dim N = d$. Vì $H_{I,J}^d(N)$ là Artin nên $H_{I,J}^d(M)$ là Artin.

(ii) Bây giờ ta giả sử rằng $\dim M \leq 1$. Nếu $d = 1$, khi đó ta có một dãy khớp ngắn

$$\cdots \rightarrow H_{I,J}^1(N) \rightarrow H_{I,J}^1(M) \rightarrow H_{I,J}^1(M/N) \rightarrow 0.$$

Vì $H_{I,J}^1(N)$ là Artin và $\text{Supp}_R(M/N)$ là hữu hạn nên $\text{Supp}_R(H_{I,J}^1(M))$ là hữu hạn. Nếu $\dim M = 0$ thì từ dãy khớp ngắn

$$0 \rightarrow H_{I,J}^0(N) \rightarrow H_{I,J}^0(M) \rightarrow H_{I,J}^0(M/N) \rightarrow 0$$

ta suy ra $\text{Supp}_R(H_{I,J}^0(M))$ là hữu hạn.

(iii) Ta xét dãy khớp dài

$$\cdots \rightarrow H_{I,J}^{d-1}(N) \rightarrow H_{I,J}^{d-1}(M) \xrightarrow{\alpha} H_{I,J}^{d-1}(M/N) \rightarrow H_{I,J}^d(N) \rightarrow \cdots$$

Vì N là hữu hạn sinh và $\dim N \leq d$ nên ta áp dụng [43, 2.13] để suy ra rằng $\text{Supp}_R(H_{I,J}^{d-1}(N)/JH_{I,J}^{d-1}(N))$ là hữu hạn. Bằng cách áp dụng hàm tử $R/J \otimes_R -$ lên dãy khớp

$$\cdots \rightarrow H_{I,J}^{d-1}(N) \rightarrow H_{I,J}^{d-1}(M) \rightarrow \text{Im}\alpha \rightarrow 0$$

cho ta được một dãy khớp

$$H_{I,J}^{d-1}(N)/JH_{I,J}^{d-1}(N) \rightarrow H_{I,J}^{d-1}(M)/JH_{I,J}^{d-1}(M) \rightarrow \text{Im}\alpha/J\text{Im}\alpha \rightarrow 0.$$

Trong đó $\text{Supp}_R(H_{I,J}^{d-1}(M/N))$ là hữu hạn và $\text{Supp}_R(\text{Im}\alpha)$ cũng vậy.

Vì vậy $\text{Supp}_R(H_{I,J}^{d-1}(M)/JH_{I,J}^{d-1}(M))$ là hữu hạn. $\square$

Chúng ta bắt đầu bằng cách nhắc lại định nghĩa về môđun Artin yếu trong bài báo [25]. Một R -môđun M được gọi là Artin yếu nếu bao nội xạ của nó là $E_R(M)$, có thể viết phân tích ra như sau $E_R(M) = \bigoplus_{i=1}^n E_R(R/\mathfrak{m}_i)^{\mu_0(\mathfrak{m}_i; M)}$, với $\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_n$ là ideal tối đại của R . Từ [25, 2.3 (a)] ta suy ra rằng M là Artin yếu nếu và chỉ nếu $\text{Supp}_R(M)$ chứa hữu hạn các ideal tối đại. Tất cả các môđun Artin đều là môđun Artin yếu. Phạm trù các Artin yếu là phạm trù con serre của phạm trù các R -môđun. Chúng ta biết rằng M là Artin yếu nếu và chỉ nếu M là Lasker yếu và $\text{Supp}_R(M)$ chứa các ideal tối đại ([25, 2.3]).

Mệnh đề 3.1.2. *Cho M là R -môđun Artin yếu. Khi đó $H_{I,J}^i(M)$ là Artin yếu với mọi $i \geq 0$.*

Chứng minh. Theo giả thiết, ta có $\dim M = 0$ do đó $H_{I,J}^i(M) = 0$ với mọi $i > 0$. Từ [25, 2.3 (c)] ta suy ra rằng $H_{I,J}^0(M)$ là Artin yếu, ta có điều phải chứng minh. $\square$

Chúng ta biết rằng nếu $(R, \mathfrak{m})$ là vành địa phương và M là một R -môđun hữu hạn sinh, khi đó $H_{\mathfrak{m}}^i(M)$ là Artin với mọi $i \geq 0$ (xem [12]). Lưu ý rằng, nếu M là một R -môđun bất kỳ, khi đó $H_{\mathfrak{m}}^i(M)$ là Artin yếu với mọi $i \geq 0$.

Mệnh đề 3.1.3. Cho M là R -môđun hữu hạn sinh và t là số nguyên không âm. Giả sử rằng $H_{I,J}^i(R/\mathfrak{p})$ là một Artin yếu với mọi $\mathfrak{p} \in \text{Supp}_R(M)$ và $i < t$. Khi đó $H_{I,J}^i(M)$ là Artin yếu với mọi $i < t$.

Chứng minh. Vì M là hữu hạn sinh, khi đó có một lọc của các môđun con của M

$$0 = M_0 \subseteq M_1 \subseteq \dots \subseteq M_n = M$$

sao cho $M_j/M_{j-1} \cong R/\mathfrak{p}_j$ với một số $\mathfrak{p}_j \in \text{Supp}_R(M)$. Dãy khớp ngắn

$$0 \rightarrow M_{j-1} \rightarrow M_j \rightarrow R/\mathfrak{p}_j \rightarrow 0$$

cảm sinh ra dãy khớp dài

$$\dots \rightarrow H_{I,J}^i(M_{j-1}) \rightarrow H_{I,J}^i(M_j) \rightarrow H_{I,J}^i(R/\mathfrak{p}_j) \rightarrow \dots$$

Bằng cách quy nạp trên j , ta kết luận rằng $H_{I,J}^i(M)$ là Artin yếu với mọi $i < t$. $\square$

Một R -môđun M được gọi là I -tự do-xoắn nếu $\Gamma_I(M) = 0$.

Bổ đề 3.1.4. Cho I là idêan của R và M là R -môđun Lasker yếu. Khi đó M là R -môđun I -tự do-xoắn nếu và chỉ nếu có một phần tử $x \in I$ là M -chính quy.

Chứng minh. Cách chứng minh tương tự với [12, 2.1.1(ii)] và lưu ý rằng tập hợp $\text{Ass}_R(M)$ là hữu hạn. $\square$

Chúng ta biết rằng nếu $(R, \mathfrak{m})$ là vành địa phương và M là R -môđun hữu hạn sinh, khi đó $H_{\mathfrak{m}}^i(M)$ là Artin với mọi $i \geq 0$ (xem [12]). Lưu ý rằng, nếu M là một R -môđun bất kỳ, khi đó $H_{\mathfrak{m}}^i(M)$ là Artin yếu với mọi $i \geq 0$.

Mệnh đề 3.1.5. Cho $(R, \mathfrak{m})$ là vành địa phương và $\sqrt{I+J} = \mathfrak{m}$. Khi đó $H_{I,J}^i(M)/JH_{I,J}^i(M)$ là Artin yếu với mọi $i \geq 0$.

Chứng minh. Từ [58, 1.4] ta suy ra rằng $H_{I,J}^i(M) \cong H_{\mathfrak{m},J}^i(M)$ với mọi $i \geq 0$. Lưu ý rằng $\text{Supp}_R(H_{\mathfrak{m},J}^i(M)/JH_{\mathfrak{m},J}^i(M)) \subseteq \{\mathfrak{m}\}$ và theo [25, 2.3 (b)] ta có điều phải chứng minh. $\square$

Hajikarimi đã chứng minh rằng [25, 2.11] nếu M là R -môđun Lasker yếu có chiều hữu hạn d , khi đó $H_I^d(M)$ là Artin yếu. Chu và Wang trình bày trong [14, 2.1] rằng trong vành địa phương và M là hữu hạn sinh với $\dim M = d$, khi đó môđun $H_{I,J}^d(M)$ là Artin. Bây giờ chúng ta đưa ra kết quả mở rộng trong trường hợp M là Lasker yếu.

Định lý 3.1.6. *Cho M là một R -môđun Lasker yếu sao cho $\dim M = d < \infty$. Khi đó $H_{I,J}^d(M)/JH_{I,J}^d(M)$ là Artin yếu.*

Chứng minh. Chúng ta chứng minh bằng cách quy nạp theo d . Nếu $d = 0$, khi đó $\text{Ass}_R(M) \subseteq \text{Max}(R)$. Hơn nữa, $\text{Ass}_R(M)$ là một tập hữu hạn vì M là Lasker yếu. Theo [25, 2.3 (b)], M là Artin yếu và khi đó $H_{I,J}^0(M)/JH_{I,J}^0(M)$ là Artin yếu. Cho $d > 0$. Dãy khớp ngắn

$$0 \rightarrow \Gamma_J(M) \rightarrow M \rightarrow M/\Gamma_J(M) \rightarrow 0$$

cảm sinh ra dãy khớp

$$H_{I,J}^d(\Gamma_J(M)) \rightarrow H_{I,J}^d(M) \rightarrow H_{I,J}^d(M/\Gamma_J(M)) \rightarrow 0.$$

Theo [58, 2.5], ta có $H_{I,J}^d(\Gamma_J(M)) \cong H_I^d(\Gamma_J(M))$. Hơn nữa, $\Gamma_J(M)$ là Lasker yếu với $\dim \Gamma_J(M) \leq d$, do đó $H_I^d(\Gamma_J(M))$ là Artin yếu theo [25, 2.11].

Cho $\overline{M} = M/\Gamma_J(M)$, ta cần phải chứng minh rằng $H_{I,J}^d(\overline{M})/JH_{I,J}^d(\overline{M})$ là Artin yếu. Theo Bổ đề 3.1.4, tồn tại một phần tử $x \in J$ là $\overline{M}$ -chính quy. Từ dãy khớp ngắn

$$0 \rightarrow \overline{M} \xrightarrow{x} \overline{M} \rightarrow \overline{M}/x\overline{M} \rightarrow 0$$

cảm sinh ra dãy khớp dài

$$\cdots \rightarrow H_{I,J}^{d-1}(\overline{M}/x\overline{M}) \xrightarrow{f} H_{I,J}^d(\overline{M}) \xrightarrow{x} H_{I,J}^d(\overline{M}) \rightarrow 0.$$

Vì $\overline{M}/x\overline{M}$ là Lasker yếu với $\dim(\overline{M}/x\overline{M}) \leq d-1$, ta kết luận rằng $H_{I,J}^{d-1}(\overline{M}/x\overline{M})/JH_{I,J}^{d-1}(\overline{M}/x\overline{M})$ là Artin yếu theo giả thiết quy nạp. Dãy khớp ngắn

$$0 \rightarrow \text{Im} f \rightarrow H_{I,J}^d(\overline{M}) \xrightarrow{x} H_{I,J}^d(\overline{M}) \rightarrow 0$$

cho chúng ta dãy khớp dài

$$\cdots \text{Im} f/J\text{Im} f \rightarrow H_{I,J}^d(\overline{M})/JH_{I,J}^d(\overline{M}) \xrightarrow{x} H_{I,J}^d(\overline{M})/JH_{I,J}^d(\overline{M}) \rightarrow 0.$$

Vì $x \in J$, ta suy ra rằng $H_{I,J}^d(\overline{M})/JH_{I,J}^d(\overline{M})$ là một ảnh đồng cấu của $\text{Im}f/J\text{Im}f$. Nhưng $\text{Im}f/J\text{Im}f$ là Artin yếu theo [25, 2.3 (c)]. Do đó $H_{I,J}^d(\overline{M})/JH_{I,J}^d(\overline{M})$ là Artin yếu. $\square$

Từ chứng minh của Định lý 3.1.6 (i), ta biết rằng nếu $\dim(M/\Gamma_J(M)) < \dim M$, khi đó $H_{I,J}^{\dim M}(M)$ là Artin.

Hệ quả 3.1.7. *Cho M là R -môđun Lasker yếu sao cho $\dim M = d < \infty$. Khi đó $\text{Supp}_R(H_{I,J}^d(M)/JH_{I,J}^d(M))$ là hữu hạn.*

Định lý sau tạo nên mối liên hệ về tính Artin yếu giữa $H_I^i(M)$ và $H_{I,J}^i(M)$.

Định lý 3.1.8. *Cho M là R -môđun và t là một số nguyên không âm. Giả sử rằng $H_{I,J}^i(M)$ là Artin yếu với mọi $i < t$. Khi đó*

- (i) $H_{\mathfrak{a}}^i(M)$ là Artin yếu với mọi $i < t$ và $\mathfrak{a} \in \tilde{W}(I, J)$.
- (ii) $\text{Ext}_R^i(R/\mathfrak{a}, M)$ là Artin yếu với mọi $i < t$ và $\mathfrak{a} \in \tilde{W}(I, J)$.

Chứng minh. (i) Theo [52, 10.47] tồn tại một dãy phổ Grothendieck

$$E_2^{p,q} = H_{\mathfrak{a}}^p(H_{I,J}^q(M)) \Rightarrow_p H_{\mathfrak{a}}^{p+q}(M).$$

Cho $n < t$, có một cái lọc Φ của $H^n = H_{\mathfrak{a}}^n(M)$

$$0 = \Phi^{n+1}H^n \subseteq \Phi^n H^n \subseteq \dots \subseteq \Phi^1 H^n \subseteq \Phi^0 H^n = H_{\mathfrak{a}}^n(M)$$

sao cho

$$E_{\infty}^{i,n-i} \cong \Phi^i H^n / \Phi^{i+1} H^n.$$

Vì $H_{I,J}^q(M)$ là Artin yếu với mọi $q < t$ nên ta có $\dim H_{I,J}^q(M) = 0$ với mọi $q < t$ và khi đó $E_2^{p,q} = 0$ với mọi $q < t$ và $p > 0$. Do đó $E_{\infty}^{p,q} = 0$ với mọi $q < t$ và $p > 0$. Điều này suy ra

$$\Phi^1 H^n = \Phi^2 H^n = \dots = \Phi^{n+1} H^n = 0$$

với mọi $n < t$. Theo giả thiết, $E_2^{0,n} = \Gamma_{\mathfrak{a}}(H_{I,J}^n(M))$ là Artin yếu với mọi $n < t$. Ta xét đồng cấu của các dãy phổ

$$0 = E_r^{-r,n+r-1} \rightarrow E_r^{0,n} \rightarrow E_r^{r,n-r+1} = 0$$

với mọi $r \geq 2$. Ta suy ra rằng

$$E_2^{0,n} = E_3^{0,n} = \dots = E_\infty^{0,n}.$$

Từ dãy khớp ngắn

$$0 \rightarrow \Phi^1 H^n \rightarrow H_{\mathfrak{a}}^n(M) \rightarrow E_\infty^{0,n} \rightarrow 0$$

ta được $H_{\mathfrak{a}}^n(M) \cong \Gamma_{\mathfrak{a}}(H_{I,J}^n(M))$ với mọi $n < t$, và ta có điều phải chứng minh.

(ii) Theo [52, 10.47] tồn tại một dãy phổ Grothendieck

$$E_2^{p,q} = \text{Ext}_R^p(R/\mathfrak{a}, H_{I,J}^q(M)) \Rightarrow_p \text{Ext}_R^{p+q}(R/\mathfrak{a}, M).$$

Cho $n < t$, có một đẳng cấu

$$E_\infty^{i,n-i} \cong \Phi^i H^n / \Phi^{i+1} H^n$$

với mọi $i \leq n$ và $H^n = \text{Ext}_R^n(R/\mathfrak{a}, M)$. Theo giả thiết $E_2^{i,n-i}$ là Artin yếu với mọi $i \leq n$. Vì $E_\infty^{i,n-i}$ là thương con của $E_2^{i,n-i}$ nên ta có $E_\infty^{i,n-i}$ là Artin yếu.

Nhưng vì ta có

$$E_\infty^{n-1,1} \cong \Phi^{n-1} H^n / \Phi^n H^n \cong \Phi^{n-1} H^n / E_\infty^{n,0}.$$

Khi đó $\Phi^{n-1} H^n$ là Artin yếu. Bằng cách quy nạp giảm dần, ta kết luận rằng $\Phi^{n-2} H^n, \dots, \Phi^0 H^n$ là Artin yếu và ta có điều phải chứng minh. $\square$

Mệnh đề 3.1.9. *Cho M là R -môđun hữu hạn sinh và t là một số nguyên không âm. Giả sử rằng $H_{I,J}^i(R/\mathfrak{p})$ là một Artin yếu với mọi $\mathfrak{p} \in \text{Supp}_R(M)$ và với mọi $i < t$. Khi đó $H_{I,J}^i(M)$ là Artin yếu với mọi $i < t$.*

Chứng minh. Vì M là hữu hạn sinh, khi đó có một lọc của các môđun con của M

$$0 = M_0 \subseteq M_1 \subseteq \dots \subseteq M_n = M$$

sao cho $M_j/M_{j-1} \cong R/\mathfrak{p}_j$ với một số $\mathfrak{p}_j \in \text{Supp}_R(M)$. Dãy khớp ngắn

$$0 \rightarrow M_{j-1} \rightarrow M_j \rightarrow R/\mathfrak{p}_j \rightarrow 0$$

cảm sinh ra dãy khớp dài

$$\dots \rightarrow H_{I,J}^i(M_{j-1}) \rightarrow H_{I,J}^i(M_j) \rightarrow H_{I,J}^i(R/\mathfrak{p}_j) \rightarrow \dots$$

Bằng cách quy nạp trên j , ta kết luận rằng $H_{I,J}^i(M)$ là Artin yếu với mọi $i < t$. $\square$

3.2 Tính Artin của môđun đối đồng điều địa phương theo một cặp idêan

Trong [50, 2.10], nhóm tác giả đã chứng minh rằng nếu $(R, \mathfrak{m})$ là vành địa phương và M là hữu hạn sinh sao cho $\text{Supp}_R(H_{I,J}^i(M)) \subseteq \{\mathfrak{m}\}$ với mọi $i < t$, khi đó $H_{I,J}^i(M) \cong H_{\mathfrak{m}}^i(M)$ với mọi $i < t$. Từ đây, chúng tôi đưa ra kết quả tổng quát hơn bởi định lý dưới đây

Định lý 3.2.1. *Cho $(R, \mathfrak{m})$ là vành địa phương và t là một số nguyên dương. Nếu M là một R -môđun sao cho $\text{Supp}_R(H_{I,J}^i(M)) \subseteq \{\mathfrak{m}\}$ với mọi $i \leq t$ thì $H_{I,J}^i(M) \cong H_{\mathfrak{m},J}^i(M) \cong H_{\mathfrak{m}}^i(M)$ với mọi $i \leq t$.*

Chứng minh. Trước tiên, ta chứng minh rằng $H_{I,J}^i(M) \cong H_{\mathfrak{m},J}^i(M)$ với mọi $i \leq t$. Cho $F(-) := \Gamma_{\mathfrak{m},J}(-)$ và $G(-) := \Gamma_{I,J}(-)$ là các hàm tử từ phạm trù các R -môđun vào chính nó. Với mỗi R -môđun M , ta có

$$FG(M) = \Gamma_{\mathfrak{m},J}(\Gamma_{I,J}(M)) = \Gamma_{\mathfrak{m}+I,J}(M) = \Gamma_{\mathfrak{m},J}(M).$$

Do đó $FG(-) = \Gamma_{\mathfrak{m},J}(-)$. Cho E là R -môđun nội xạ. Vì $\Gamma_{I,J}(E)$ là môđun nội xạ nên $R^i F(G(E)) = R^i F(\Gamma_{I,J}(E)) = 0$ với mọi $i > 0$. Theo [52, 10.47] tồn tại một dãy phổ Grothendieck

$$E_2^{p,q} = H_{\mathfrak{m},J}^p(H_{I,J}^q(M)) \xrightarrow{p} H_{\mathfrak{m},J}^{p+q}(M).$$

Vì $\text{Supp}_R(H_{I,J}^q(M)) \subseteq \{\mathfrak{m}\} \subseteq W(\mathfrak{m}, J)$ nên $H_{I,J}^q(M)$ là R -môđun $(\mathfrak{m}, J)$ -xoắn với mọi $0 \leq q \leq t$. Từ [58, 1.13] ta suy ra

$$E_2^{p,q} = H_{\mathfrak{m},J}^p(H_{I,J}^q(M)) = 0$$

với mọi $p > 0, 0 \leq q \leq t$.

Cho $0 \leq n \leq t$, tồn tại lọc Φ của $H^n = H_{\mathfrak{m},J}^n(M)$

$$0 = \Phi^{n+1}H^n \subseteq \Phi^n H^n \subseteq \dots \subseteq \Phi^1 H^n \subseteq \Phi^0 H^n = H_{\mathfrak{m},J}^n(M)$$

sao cho

$$E_{\infty}^{i,n-i} \cong \Phi^i H^n / \Phi^{i+1} H^n, 0 \leq i \leq n.$$

Đặc biệt

$$E_{\infty}^{0,n} \cong \Phi^0 H^n / \Phi^1 H^n,$$

$$E_{\infty}^{i,n-i} \cong \Phi^i H^n / \Phi^{i+1} H^n = 0, 0 < i \leq n.$$

Do đó $\Phi^1 H^n = \Phi^2 H^n = \dots = \Phi^{n+1} H^n = 0$ và $E_{\infty}^{0,n} \cong \Phi^0 H^n = H_{\mathfrak{m},J}^n(M)$.

Trong trường hợp $r \geq 2$, từ các đồng cấu của dãy phổ

$$0 = E_r^{-r,n+r-1} \rightarrow E_r^{0,n} \rightarrow E_r^{r,n-r+1} = 0$$

ta có $E_2^{0,n} = E_3^{0,n} = \dots = E_{\infty}^{0,n}$. Vì vậy

$$H_{\mathfrak{m},J}^n(M) \cong E_2^{0,n} = H_{\mathfrak{m},J}^0(H_{I,J}^n(M)) = H_{I,J}^n(M)$$

vì $H_{I,J}^n(M)$ là R -môđun $(\mathfrak{m}, J)$ -xoắn.

Tiếp theo để chứng minh $H_{I,J}^i(M) \cong H_{\mathfrak{m}}^i(M)$ với mọi $i \leq t$, ta đặt $F(-) := \Gamma_{\mathfrak{m}}(-)$ và $G(-) := \Gamma_{I,J}(-)$. Khi đó, vì $\mathfrak{m} \in \tilde{W}(I, J)$

$$\begin{aligned} FG(M) &= \Gamma_{\mathfrak{m}}(\Gamma_{I,J}(M)) \\ &= \Gamma_{\mathfrak{m}}(M). \end{aligned}$$

Do đó $FG(-) = \Gamma_{\mathfrak{m}}(-)$. Khi đó $R^i F(G(E)) = H_{\mathfrak{m}}^i(\Gamma_{I,J}(E)) = 0$ với mọi $i > 0$.

Theo [52, 10.47] tồn tại dãy phổ Grothendieck

$$E_2^{p,q} = H_{\mathfrak{m}}^p(H_{I,J}^q(M)) \Rightarrow_p H_{\mathfrak{m}}^{p+q}(M).$$

Vì $\text{Supp}_R(H_{I,J}^q(M)) \subseteq \{\mathfrak{m}\} \subseteq W(\mathfrak{m}, 0)$, nên theo [58, 1.7] $H_{I,J}^q(M, N)$ là môđun $(\mathfrak{m}, 0)$ -xoắn với $0 \leq q \leq t$. Theo [58, 1.13]

$$E_2^{p,q} = H_{\mathfrak{m}}^p(H_{I,J}^q(M)) = 0$$

với $p > 0, 0 \leq q \leq t$. Cho $0 \leq n = p + q \leq t$, tồn tại lọc Φ của $H^n = H_{\mathfrak{m}}^n(M)$ sao cho

$$0 = \Phi^{n+1} H^n \subseteq \Phi^n H^n \subseteq \dots \subseteq \Phi^1 H^n \subseteq \Phi^0 H^n = H_{\mathfrak{m}}^n(M)$$

và

$$E_{\infty}^{i,n-i} \cong \Phi^i H^n / \Phi^{i+1} H^n, 0 \leq i \leq n.$$

Chúng ta có được $E_2^{p,q} = H_{\mathfrak{m}}^p(H_{I,J}^q(M)) = 0$, với $p > 0, 0 \leq q \leq t$.

Khi đó

$$E_{\infty}^{0,n} \cong \Phi^0 H^n / \Phi^1 H^n,$$

$$E_{\infty}^{i,n-i} \cong \Phi^i H^n / \Phi^{i+1} H^n = 0, 0 < i \leq n.$$

Do đó $\Phi^1 H^n = \Phi^2 H^n = \dots = \Phi^{n+1} H^n = 0$ và $E_{\infty}^{0,n} \cong \Phi^0 H^n = H_{\mathfrak{m}}^n(M)$.

Khi $r \geq 2$, từ các đồng cấu dãy phổ

$$0 = E_r^{-r,n+r-1} \rightarrow E_r^{0,n} \rightarrow E_r^{r,n-r+1} = 0$$

ta nhận được kết quả $E_2^{0,n} = E_3^{0,n} = \dots = E_{\infty}^{0,n}$.

Vì $H_{I,J}^n(M)$ là R -môđun $(\mathfrak{m}, 0)$ -xoắn nên ta có

$$H_{\mathfrak{m}}^n(M) \cong E_2^{0,n} = H_{\mathfrak{m}}^0(H_{I,J}^n(M)) = H_{I,J}^n(M).$$

□

Từ Định lý 3.2.1 chúng ta suy ra được kết quả sau về tính Artin của $H_{I,J}^i(M)$.

Hệ quả 3.2.2. Cho $(R, \mathfrak{m})$ là vành địa phương và t là số nguyên dương. Nếu M là R -môđun hữu hạn sinh sao cho $\text{Supp}_R(H_{I,J}^i(M)) \subseteq \{\mathfrak{m}\}$ với mọi $i \leq t$ thì $H_{I,J}^i(M)$ là một R -môđun Artin với mọi $i \leq t$.

Chứng minh. Một kết quả được trình bày bởi [12, 7.1.3] rằng $H_{\mathfrak{m}}^i(M)$ là R -môđun Artin với mọi i . Do đó từ kết quả của Định lý 3.2.1 ta có điều phải chứng minh. □

Định lý 3.2.3. Cho M là R -môđun và t là số nguyên dương. Khi đó

- (i) $\dim H_{I,J}^i(M) \leq k$ với mọi $i < t$ nếu và chỉ nếu $\dim H_{\mathfrak{a}}^i(M) \leq k$ với mọi $i < t$ và $\mathfrak{a} \in \tilde{W}(I, J)$.
- (ii) Nếu M là hữu hạn sinh và $\text{Supp}_R(H_{I,J}^i(M)) \subseteq \text{Max}(R)$ với mọi $i < t$ thì $H_{\mathfrak{a}}^i(M)$ là Artin với mọi $i < t$ và $\mathfrak{a} \in \tilde{W}(I, J)$.
- (iii) Giả sử rằng $(R, \mathfrak{m})$ là một vành địa phương và M là hữu hạn sinh. Khi đó $H_{I,J}^i(M)$ là Artin với mọi $i < t$ nếu và chỉ nếu $H_{\mathfrak{a}}^i(M)$ là Artin với mọi $i < t$ và $\mathfrak{a} \in \tilde{W}(I, J)$.

Chứng minh. (i). ($\Rightarrow$). Cho $\mathfrak{a} \in \tilde{W}(I, J)$ và $n < t$. Theo [52, 10.47], ta có được dãy phổ

$$E_2^{p,q} = H_{\mathfrak{a}}^p(H_{I,J}^q(M)) \Rightarrow_p H_{\mathfrak{a}}^{p+q}(M).$$

Khi đó tồn tại lọc Φ của $H^n = H_{\mathfrak{a}}^n(M)$

$$0 = \Phi^{n+1}H^n \subseteq \Phi^n H^n \subseteq \dots \subseteq \Phi^1 H^n \subseteq \Phi^0 H^n = H^n$$

sao cho

$$E_{\infty}^{i,n-i} \cong \Phi^i H^n / \Phi^{i+1} H^n$$

với mọi $i \leq n$. Vì $E_{\infty}^{i,n-i}$ là thương con của $E_2^{i,n-i}$ nên theo giả thiết ta có $\dim E_{\infty}^{i,n-i} \leq k$ với mọi $i \leq n$. Do đó $\dim \Phi^i H^n \leq k$ với mọi $i \leq n$. Đặc biệt, $\dim H_{\mathfrak{a}}^n(M) = \dim \Phi^0 H^n \leq k$.

($\Leftarrow$). Theo [58, 2.3] ta có

$$\text{Supp}_R H_{I,J}^i(M) \subseteq \bigcup_{\mathfrak{a} \in \tilde{W}(I,J)} \text{Supp}_R H_{\mathfrak{a}}^i(M).$$

Vì $\dim H_{\mathfrak{a}}^i(M) \leq k$ với mọi $i < t$ và $\mathfrak{a} \in \tilde{W}(I, J)$ nên $\dim H_{I,J}^i(M) \leq k$ với mọi $i < t$.

(ii). Từ kết quả của (i) ta suy ra rằng $\text{Supp}_R(H_{\mathfrak{a}}^i(M)) \subseteq \text{Max}(R)$ với mọi $i < t$. Do đó $H_{\mathfrak{a}}^i(M)$ là Artin với mọi $i < t$ theo [59, 2.2].

(iii). ($\Rightarrow$) Được suy ra từ kết quả của (ii).

($\Leftarrow$). Lưu ý rằng $\text{Supp}_R(H_{\mathfrak{a}}^i(M)) \subseteq \{\mathfrak{m}\}$ với mọi $i < t$ và $\mathfrak{a} \in \tilde{W}(I, J)$. Theo (i), ta có $\text{Supp}_R(H_{I,J}^i(M)) \subseteq \{\mathfrak{m}\}$ với mọi $i < t$. Do đó, theo Định lý 3.2.1 ta có được điều phải chứng minh. $\square$

Theo [8, Hệ quả 2.9] nội dung của hệ quả dưới đây đã được chứng minh trong trường hợp $\dim H_I^i(M) \leq 1$ với mọi $i < t$. Bây giờ chúng tôi mở rộng kết quả này cho trường hợp $\dim H_{I,J}^i(M) \leq 1$ với mọi $i < t$. Áp dụng Định lý 3.2.3(i) sẽ cho chúng ta hệ quả sau

Hệ quả 3.2.4. Cho M là R -môđun hữu hạn sinh và t là số nguyên không âm sao cho $\dim H_{I,J}^i(M) \leq 1$ với mọi $i < t$. Khi đó

- (i) R -môđun $H_{\mathfrak{a}}^i(M)$ là $\mathfrak{a}$ -đối hữu hạn với mọi $i < t$ và với mọi $\mathfrak{a} \in \tilde{W}(I, J)$;
- (ii) R -môđun $\text{Hom}(R/\mathfrak{a}, H_{\mathfrak{a}}^t(M))$ là hữu hạn sinh với mọi $\mathfrak{a} \in \tilde{W}(I, J)$. Đặc biệt, tập $\text{Ass}_R(H_{\mathfrak{a}}^t(M))$ là hữu hạn với mọi $\mathfrak{a} \in \tilde{W}(I, J)$.

Chứng minh. Nội dung này được suy ra từ việc áp dụng Định lý 3.2.3(i) và [8, 2.9]. $\square$

Trong [40, 3.1], nhóm tác giả đã chứng minh nếu $(R, \mathfrak{m})$ là vành địa phương và M, N là các R -môđun hữu hạn sinh với $\dim N = d$ và $\text{pd} M = p$, khi đó $H_{I,J}^{p+d}(M, N)$ là một R -môđun Artin. Chúng tôi đã khái quát hóa kết quả của [40, 3.1] cho các môđun minimax bởi định lý sau.

Mệnh đề 3.2.5. *Cho $(R, \mathfrak{m})$ là vành địa phương và M là một R -môđun hữu hạn sinh với $\text{pd} M = p$. Nếu N là R -môđun với $\dim N = d$, khi đó $H_{I,J}^{p+d}(M, N)$ là Artin.*

Chứng minh. Vì N là minimax, nên ta có dãy khớp

$$0 \rightarrow L \rightarrow N \rightarrow A \rightarrow 0$$

với L là hữu hạn sinh và A là Artin. Cho chúng ta một dãy khớp dài

$$\dots \rightarrow H_{I,J}^i(M, L) \rightarrow H_{I,J}^i(M, N) \rightarrow H_{I,J}^i(M, A) \rightarrow \dots$$

Từ [40, 3.7], $H_{I,J}^i(M, A)$ là R -môđun Artin với mọi $i \geq 0$. Kết hợp [40, 3.2] với [66, 2.4] chúng ta kết luận $H_{I,J}^{p+d}(M, L)$ là Artin vì $\dim L \leq \dim N = d$. Do đó $H_{I,J}^{p+d}(M, N)$ cũng là Artin. $\square$

Trong [13], khi M, N là các R -môđun hữu hạn sinh và $(R, \mathfrak{m})$ là vành địa phương, Chu and Tang đã trình bày rằng $\text{Supp}_R(H_I^i(M, N)) \subseteq \{\mathfrak{m}\}$ nếu và chỉ nếu $H_I^i(M, N)$ là Artin. Chúng tôi khái quát hóa cho $H_{I,J}^i(M, N)$ và sự mở rộng của Định lý 3.2.1 ta có được Định lý dưới đây

Định lý 3.2.6. *Cho $(R, \mathfrak{m})$ là vành địa phương và t là số nguyên không âm. Giả sử rằng M là R -môđun hữu hạn sinh và N là một R -môđun tùy ý sao cho $\text{Supp}_R(H_{I,J}^i(M, N)) \subseteq \{\mathfrak{m}\}$ với mọi $i \leq t$. Khi đó*

- (i) $H_{I,J}^i(M, N) \cong H_{\mathfrak{m},J}^i(M, N) \cong H_{\mathfrak{m}}^i(M, N)$ với mọi $i \leq t$.
- (ii) Nếu N là minimax thì $H_{I,J}^i(M, N)$ là artin với mọi $i \leq t$.

Chứng minh. (i) Trước tiên, ta chứng minh $H_{I,J}^i(M, N) \cong H_{\mathfrak{m},J}^i(M, N)$ với mọi $i \leq t$. Ta ký hiệu $F(-) := \Gamma_{\mathfrak{m},J}(-)$ và $G(-) := \Gamma_{I,J}(M, -)$ là các hàm tử từ phạm trù các R -môđun vào chính nó. Trong đó F là hàm tử khớp trái. Với mỗi

R -môđun N , ta có

$$\begin{aligned}
FG(N) &= \Gamma_{\mathfrak{m},J}(\Gamma_{I,J}(M, N)) \\
&= \Gamma_{\mathfrak{m},J}(\Gamma_{I,J}(\text{Hom}_R(M, N))) \\
&= \Gamma_{\mathfrak{m}+I,J}(\text{Hom}_R(M, N)) \\
&= \Gamma_{\mathfrak{m},J}(\text{Hom}_R(M, N)) \\
&= \Gamma_{\mathfrak{m},J}(M, N).
\end{aligned}$$

Do đó $FG(-) := \Gamma_{\mathfrak{m},J}(M, -)$.

Cho E là R -môđun nội xạ. Vì $\Gamma_{I,J}(E)$ là R -môđun nội xạ, nên ta có $R^i F(G(E)) = R^i F(\Gamma_{I,J}(M, E)) \cong R^i F(\text{Hom}_R(M, \Gamma_{I,J}(E))) = 0$ với mọi $i > 0$. Theo [52, 10.47] tồn tại dãy phổ Grothendieck

$$E_2^{p,q} = H_{\mathfrak{m},J}^p(H_{I,J}^q(M, N)) \Rightarrow_p H_{\mathfrak{m},J}^{p+q}(M, N).$$

Vì $\text{Supp}_R(H_{I,J}^q(M, N)) \subseteq \{\mathfrak{m}\} \subseteq W(\mathfrak{m}, J)$, áp dụng [58, 1.7] ta có $H_{I,J}^q(M, N)$ là môđun $(\mathfrak{m}, J)$ -xoắn với $0 \leq q \leq t$. Theo [58, 1.13], ta được kết quả

$$E_2^{p,q} = H_{\mathfrak{m},J}^p(H_{I,J}^q(M, N)) = 0$$

với mọi $p > 0, 0 \leq q \leq t$.

Cho $0 \leq n = p + q \leq t$, tồn tại lọc Φ của $H^n = H_{\mathfrak{m},J}^n(M, N)$ sao cho

$$0 = \Phi^{n+1}H^n \subseteq \Phi^n H^n \subseteq \dots \subseteq \Phi^1 H^n \subseteq \Phi^0 H^n = H_{\mathfrak{m},J}^n(M, N)$$

và

$$E_{\infty}^{i,n-i} \cong \Phi^i H^n / \Phi^{i+1} H^n, 0 \leq i \leq n.$$

Vì $E_2^{p,q} = H_{\mathfrak{m},J}^p(H_{I,J}^q(M, N)) = 0$ với $p > 0, 0 \leq q \leq t$. Do đó ta có

$$E_{\infty}^{0,n} \cong \Phi^0 H^n / \Phi^1 H^n,$$

$$E_{\infty}^{i,n-i} \cong \Phi^i H^n / \Phi^{i+1} H^n = 0, 0 < i \leq n.$$

Do đó $\Phi^1 H^n = \Phi^2 H^n = \dots = \Phi^{n+1} H^n = 0$ và $E_{\infty}^{0,n} \cong \Phi^0 H^n = H_{\mathfrak{m},J}^n(M, N)$.

Với mọi $r \geq 2$, từ các đồng cấu của dãy phổ

$$0 = E_r^{-r,n+r-1} \rightarrow E_r^{0,n} \rightarrow E_r^{r,n-r+1} = 0$$

suy ra $E_2^{0,n} = E_3^{0,n} = \dots = E_\infty^{0,n}$. Vì vậy

$$H_{\mathfrak{m},J}^n(M, N) \cong E_2^{0,n} = H_{\mathfrak{m},J}^0(H_{I,J}^n(M, N)) = H_{I,J}^n(M, N)$$

vì $H_{I,J}^n(M, N)$ là một R -môđun $(\mathfrak{m}, J)$ -xoắn.

Tiếp theo để chứng minh $H_{I,J}^i(M, N) \cong H_{\mathfrak{m}}^i(M, N)$ với mọi $i \leq t$, ta đặt $F(-) := \Gamma_{\mathfrak{m}}(-)$ và $G(-) := \Gamma_{I,J}(M, -)$. Khi đó, vì $\mathfrak{m} \in \tilde{W}(I, J)$ nên

$$\begin{aligned} FG(N) &= \Gamma_{\mathfrak{m}}(\Gamma_{I,J}(M, N)) \\ &= \Gamma_{\mathfrak{m}}(\Gamma_{I,J}(\text{Hom}_R(M, N))) \\ &= \Gamma_{\mathfrak{m}}(M, N). \end{aligned}$$

Do đó $FG(-) = \Gamma_{\mathfrak{m}}(M, -)$. Cho E là R -môđun nội xạ. Ta có $R^i F(G(E)) = R^i F(\Gamma_{I,J}(M, E)) \cong R^i F(\Gamma_{I,J}(\text{Hom}_R(M, E))) = 0$ với mọi $i > 0$. Theo [52, 10.47] tồn tại dãy phổ Grothendieck

$$E_2^{p,q} = H_{\mathfrak{m}}^p(H_{I,J}^q(M, N)) \xRightarrow[p]{p} H_{\mathfrak{m}}^{p+q}(M, N).$$

Vì $\text{Supp}_R(H_{I,J}^q(M, N)) \subseteq \{\mathfrak{m}\} \subseteq W(\mathfrak{m}, 0)$ nên theo [58, 1.7] $H_{I,J}^q(M, N)$ là môđun $(\mathfrak{m}, 0)$ -xoắn với $0 \leq q \leq t$. Áp dụng [58, 1.13]

$$E_2^{p,q} = H_{\mathfrak{m}}^p(H_{I,J}^q(M, N)) = 0$$

với $p > 0, 0 \leq q \leq t$. Cho $0 \leq n = p + q \leq t$, tồn tại lọc Φ của $H^n = H_{\mathfrak{m}}^n(M, N)$ sao cho

$$0 = \Phi^{n+1}H^n \subseteq \Phi^n H^n \subseteq \dots \subseteq \Phi^1 H^n \subseteq \Phi^0 H^n = H_{\mathfrak{m}}^n(M, N)$$

và

$$E_\infty^{i,n-i} \cong \Phi^i H^n / \Phi^{i+1} H^n, 0 \leq i \leq n.$$

Vì ta có $E_2^{p,q} = H_{\mathfrak{m}}^p(H_{I,J}^q(M, N)) = 0$, với $p > 0, 0 \leq q \leq t$.

Do đó

$$E_\infty^{0,n} \cong \Phi^0 H^n / \Phi^1 H^n,$$

$$E_\infty^{i,n-i} \cong \Phi^i H^n / \Phi^{i+1} H^n = 0, 0 < i \leq n.$$

Khi đó $\Phi^1 H^n = \Phi^2 H^n = \dots = \Phi^{n+1} H^n = 0$ và $E_\infty^{0,n} \cong \Phi^0 H^n = H_{\mathfrak{m}}^n(M, N)$.

Khi $r \geq 2$, từ các đồng cấu của dãy phổ

$$0 = E_r^{-r,n+r-1} \rightarrow E_r^{0,n} \rightarrow E_r^{r,n-r+1} = 0$$

ta nhận được kết quả $E_2^{0,n} = E_3^{0,n} = \dots = E_\infty^{0,n}$.

Vì vậy

$$H_{\mathfrak{m}}^n(M, N) \cong E_2^{0,n} = H_{\mathfrak{m}}^0(H_{I,J}^n(M, N)) = H_{I,J}^n(M, N)$$

do $H_{I,J}^n(M, N)$ là R -môđun $(\mathfrak{m}, 0)$ -xoắn.

(ii) Kết hợp [19, 2.2] và (i), chúng ta thấy rằng $H_{\mathfrak{m}}^n(M, N)$ là Artin nên $H_{I,J}^i(M, N)$ là Artin với mọi $i \leq t$ khi N là R -môđun hữu hạn sinh.

Chúng ta giả sử rằng N là môđun minimax. Khi đó có dãy khớp ngắn

$$0 \rightarrow L \rightarrow N \rightarrow A \rightarrow 0,$$

với L là hữu hạn sinh và A là Artin. Từ đây, ta có dãy khớp dài

$$\dots \rightarrow H_{I,J}^i(M, L) \rightarrow H_{I,J}^i(M, N) \rightarrow H_{I,J}^i(M, A) \rightarrow \dots$$

Theo [13, 2.4], ta có $\text{Supp}_R(H_{\mathfrak{m}}^i(M, N)) \subseteq \{\mathfrak{m}\}$ nếu và chỉ nếu $H_{\mathfrak{m}}^i(M, N)$ là Artin. Áp dụng [40, 3.7], cho ta $H_{I,J}^i(M, A)$ là Artin. Do đó $H_{\mathfrak{m}}^i(M, A)$ là Artin. Suy ra $\text{Supp}_R(H_{\mathfrak{m}}^i(M, A)) \subseteq \{\mathfrak{m}\}$. Vì $H_{I,J}^i(M, A) \cong H_{\mathfrak{m}}^i(M, A)$ nên ta có $\text{Supp}_R(H_{I,J}^i(M, A)) \subseteq \{\mathfrak{m}\}$. Vì vậy $\text{Supp}_R(H_{I,J}^i(M, L)) \subseteq \{\mathfrak{m}\}$ với mọi $i \leq t$. Do $H_{I,J}^i(M, L) \cong H_{\mathfrak{m}}^i(M, L)$ nên $\text{Supp}_R(H_{\mathfrak{m}}^i(M, L)) \subseteq \{\mathfrak{m}\}$ và do đó $H_{\mathfrak{m}}^i(M, L)$ là Artin. Từ đây ta suy ra $H_{I,J}^i(M, L)$ là Artin với mọi $i \leq t$. Áp dụng những kết quả này cho dãy khớp dài trên ta được $H_{I,J}^i(M, N)$ là Artin với mọi $i \leq t$. $\square$

Định lý 3.2.7. *Cho M là R -môđun hữu hạn sinh và t là số nguyên không âm. Khi đó*

(ii) $\text{Supp}_R(H_{I,J}^i(M, N)) \subseteq \text{Max}(R)$ với mọi $i \leq t$ nếu và chỉ nếu $\text{Supp}_R(H_{\mathfrak{a}}^i(M, N)) \subseteq \text{Max}(R)$ với mọi $i \leq t$ và $\mathfrak{a} \in \tilde{W}(I, J)$.

(ii) *Giả sử rằng $(R, \mathfrak{m})$ là vành địa phương và N là hữu hạn sinh. Khi đó $H_{I,J}^i(M, N)$ là Artin với mọi $i \leq t$ nếu và chỉ nếu $H_{\mathfrak{a}}^i(M, N)$ là Artin với mọi $i \leq t$ và $\mathfrak{a} \in \tilde{W}(I, J)$.*

Chứng minh. (i) $(\Rightarrow)$. Cho $\mathfrak{a} \in \tilde{W}(I, J)$ và $n \leq t$. Ta đặt $F(-) := \Gamma_{\mathfrak{a}}(-)$ và $G(-) := \Gamma_{I,J}(M, -)$ là các hàm tử từ phạm trù các R -môđun vào chính nó. Cho R -môđun N , ta có $FG(M, N) = \Gamma_{\mathfrak{a}}(\Gamma_{I,J}(M, N)) = \Gamma_{\mathfrak{a}}(M, N)$. Nếu E là R -môđun nội xạ, khi đó $G(E) = 0$ và do đó $G(E)$ là F -không tuần hoàn phải. Theo [52,

10.47] tồn tại dãy phổ Grothendieck

$$E_2^{p,q} = H_{\mathfrak{a}}^p(H_{I,J}^q(M, N)) \Rightarrow_p H_{\mathfrak{a}}^{p+q}(M, N)$$

khi đó tồn tại lọc Φ của $H^n = H_{\mathfrak{a}}^n(M, N)$

$$0 = \Phi^{n+1}H^n \subseteq \Phi^n H^n \subseteq \dots \subseteq \Phi^1 H^n \subseteq \Phi^0 H^n = H^n$$

sao cho

$$E_{\infty}^{i,n-i} \cong \Phi^i H^n / \Phi^{i+1} H^n$$

với mọi $i \leq n$. Theo giả thiết ta có $\text{Supp}_R(H_{I,J}^i(M, N)) \subseteq \text{Max}(R)$ với mọi $i \leq t$ nên $\text{Supp}_R(E_2^{i,n-i}) \subseteq \text{Max}(R)$ và tức là $\text{Supp}_R(E_{\infty}^{i,n-i}) \subseteq \text{Max}(R)$ vì $E_{\infty}^{i,n-i}$ là thương con của $E_2^{i,n-i}$. Do vậy $\text{Supp}_R(E_{\infty}^{i,n-i}) \subseteq \text{Max}(R)$ với mọi $i \leq n$. Do đó $\text{Supp}_R(\Phi^i H^n) \subseteq \text{Max}(R)$ với mọi $i \leq n$. Đặc biệt, $\text{Supp}_R(H_{\mathfrak{a}}^n(M, N)) = \text{Supp}_R(\Phi^0 H^n) \subseteq \text{Max}(R)$.

($\Leftarrow$). Theo [66, 2.2] ta có

$$\text{Supp}_R(H_{I,J}^i(M, N)) \subseteq \bigcup_{\mathfrak{a} \in \tilde{W}(I, J)} \text{Supp}_R(H_{\mathfrak{a}}^i(M, N)).$$

Từ giả thiết trên cho ta $\text{Supp}_R(H_{I,J}^i(M, N)) \subseteq \text{Max}(R)$ với mọi $i \leq t$.

(ii) ($\Rightarrow$). Ta có $H_{I,J}^i(M, N) \cong H_{\mathfrak{m}}^i(M, N)$. Vì $H_{I,J}^i(M, N)$ là Artin nên $H_{\mathfrak{m}}^i(M, N)$ là Artin và do đó $\text{Supp}_R(H_{\mathfrak{m}}^i(M, N)) \subseteq \{\mathfrak{m}\}$. Khi đó $\text{Supp}_R(H_{I,J}^i(M, N)) \subseteq \{\mathfrak{m}\}$. Từ (i) ta suy ra $\text{Supp}_R(H_{\mathfrak{a}}^i(M, N)) \subseteq \{\mathfrak{m}\}$ và khi đó $H_{\mathfrak{a}}^i(M, N)$ là Artin theo [13, 2.4] với mọi $i \leq t$ và $\mathfrak{a} \in \tilde{W}(I, J)$.

($\Leftarrow$). Kết quả được suy ra theo (i) và Định lý 3.2.6(i). Thật vậy, $H_{\mathfrak{a}}^i(M, N)$ là Artin với mọi $i \leq t$ và $\mathfrak{a} \in \tilde{W}(I, J)$. Khi đó $\text{Supp}_R(H_{\mathfrak{a}}^i(M, N)) \subseteq \{\mathfrak{m}\}$ với mọi $i \leq t$ và $\mathfrak{a} \in \tilde{W}(I, J)$. Theo [66, 2.2] ta có $\text{Supp}_R(H_{I,J}^i(M, N)) \subseteq \{\mathfrak{m}\}$ với mọi $i \leq t$. Theo Định lý 3.2.6(i), ta có $H_{I,J}^i(M, N) \cong H_{\mathfrak{m}}^i(M, N)$ với mọi $i \leq t$. Do đó $\text{Supp}_R(H_{\mathfrak{m}}^i(M, N)) \subseteq \{\mathfrak{m}\}$ hay $H_{\mathfrak{m}}^i(M, N)$ là Artin với mọi $i \leq t$ theo [13, Định lý 2.4]. Vậy $H_{I,J}^i(M, N)$ là Artin với mọi $i \leq t$. $\square$

Chúng ta sẽ trình bày kết quả về tính Artin của $H_{I,J}^i(N)$ và $H_I^i(M, N)$.

Mệnh đề 3.2.8. *Cho M là R -môđun hữu hạn sinh, N là R -môđun tùy ý và t là số nguyên không âm. Giả sử rằng $H_{I,J}^i(N)$ là Artin với mọi $i \leq t$. Khi đó $H_I^i(M, N)$ cũng là môđun Artin với mọi $i \leq t$.*

Chứng minh. Đặt $F(-) := \Gamma_I(M, -)$ và $G(-) := \Gamma_{I,J}(-)$ là các hàm tử khớp trái từ phạm trù các R -môđun vào chính nó. Khi đó tồn tại dãy phổ Grothendieck

$$E_2^{p,q} = H_I^p(M, H_{I,J}^q(N)) \Rightarrow_p H_I^{p+q}(M, N).$$

Cho $j \leq t$, khi đó tồn tại lọc Φ của $H^j = H_I^j(M, N)$ sao cho

$$0 = \Phi^{j+1}H^j \subseteq \Phi^jH^j \subseteq \dots \subseteq \Phi^1H^j \subseteq \Phi^0H^j = H_I^j(M, N)$$

và

$$E_\infty^{i,j-i} \cong \Phi^iH^j / \Phi^{i+1}H^j, 0 \leq i \leq j.$$

Từ giả thiết, ta áp dụng [38, 2.6] có được $E_2^{p,q}$ là Artin với mọi $q \leq t$ và với mọi $p \geq 0$. Vì $E_\infty^{i,j-i}$ là thương con của $E_2^{i,j-i}$ nên $E_\infty^{i,j-i}$ là Artin với mọi $j - i \leq t$. Quá trình chứng minh tương tự ta có Φ^iH^j là Artin với mọi $0 \leq i \leq j$, và ta có điều phải chứng minh. $\square$

Chương 4

Tính minimax và cominimax của đối đồng điều địa phương suy rộng theo một cặp idêan

Mục đích của tác giả trong Chương 4 là trình bày các kết quả về tính minimax, I -cominimax và những kết quả mở rộng về tính (I, M) -cominimax của các đối đồng điều địa phương. Chúng tôi nghiên cứu các tính chất minimax và Artin của các môđun đối đồng điều địa phương suy rộng $H_{I,J}^i(M, N)$ theo một cặp idêan (I, J) . Ngoài ra, chúng tôi cũng nói các môđun đối đồng điều địa phương suy rộng có bậc lớn nhất. Ta cũng có thể nhắc lại về môđun minimax. Điều mà chúng tôi quan tâm là các môđun minimax đã được giới thiệu bởi H. Zöschinger [69]. Một R -môđun M được gọi là minimax nếu M có một môđun con hữu hạn sinh L sao cho M/L là Artin. Lớp các R -môđun minimax là một phạm trù con Serre. Đặc biệt, cho M là R -môđun hữu hạn sinh và N là R -môđun minimax. Khi đó với bất kỳ số nguyên i , các môđun $\text{Tor}_i^R(M, N)$ và $\text{Ext}_R^i(M, N)$ là minimax. Những kết quả của chương này đã được tác giả công bố trong các bài báo [46, 47]. Chúng tôi nghiên cứu về tính minimax và tính Artin của các môđun đối đồng điều địa phương suy rộng $H_{I,J}^i(M, N)$ theo một cặp idêan (I, J) . Chúng tôi cũng đưa ra các kết quả về môđun đối đồng điều địa phương suy rộng bậc lớn nhất và quan tâm nghiên cứu về tính minimax và cominimax của $H_{I,J}^i(M, N)$.

4.1 Tính minimax của đối đồng điều địa phương suy rộng

Định nghĩa 4.1.1 ([69]). Một R -môđun M được gọi là minimax nếu M có một môđun con hữu hạn sinh L sao cho M/L là Artin.

Nhận xét 4.1.2. i) Lớp các R -môđun minimax là phạm trù con Serre. Trong trường hợp đặc biệt, cho M là R -môđun hữu hạn sinh và N là một R -môđun minimax. Khi đó cho bất kỳ số nguyên i , các môđun $\mathrm{Tor}_i^R(M; N)$ và $\mathrm{Ext}_R^i(M; N)$ là minimax với mọi $i \geq 0$.

ii) Tập các idêan nguyên tố liên kết của bất kỳ R -môđun minimax nào cũng là hữu hạn.

Định nghĩa 4.1.3 ([4]). Một môđun K được gọi là I -cominimax nếu $\mathrm{Supp}_R(K) \subseteq V(I)$ và $\mathrm{Ext}_R^i(R/I; K)$ là minimax với mọi $i \geq 0$.

Nhận xét 4.1.4. Tất cả các R -môđun hữu hạn sinh và minimax là các R -môđun I -cominimax.

Định nghĩa 4.1.5 ([9]). Cho M, K là các R -module. K được gọi là (I, M) -đối hữu hạn nếu $\mathrm{Supp}_R(K) \subseteq V(I)$ và $\mathrm{Ext}_R^i(M/IM; K)$ là hữu hạn sinh với mọi $i \geq 0$.

Bổ đề 4.1.6. ([40, 2.2]) Cho M là R -môđun hữu hạn sinh và N là R -môđun tùy ý. Khi đó

$$\Gamma_{I,J}(M, N) = \mathrm{Hom}_R(M, \Gamma_{I,J}(N)).$$

Bổ đề 4.1.7. ([40, 2.6]) Cho N là một R -module (I, J) -xoắn. Khi đó

$$H_{I,J}^i(M, N) \cong \mathrm{Ext}_R^i(M, N)$$

với mọi $i \geq 0$.

Bổ đề 4.1.8. ([32, 2.1]) Cho M là R -môđun minimax. Khi đó M là I -xoắn-tự do nếu và chỉ nếu I chứa một ước khác không trên M .

Định lý sau liên quan đến tính minimax của $H_{I,J}^i(N)$ và $H_{I,J}^i(M, N)$, không cần thiết N phải là hữu hạn sinh.

Định lý 4.1.9. Cho M là R -môđun hữu hạn sinh và N là R -môđun tùy ý. Cho t là số nguyên không âm sao cho $H_{I,J}^i(N)$ là minimax với mọi $i < t$. Khi đó

- (i) $\text{Ext}_R^i(R/\mathfrak{a}, N)$ là minimax với mọi $i < t$ và $\mathfrak{a} \in \tilde{W}(I, J)$.
- (ii) Nếu $\text{Ext}_R^t(R/\mathfrak{a}, N)$ là minimax với mọi $\mathfrak{a} \in \tilde{W}(I, J)$ thì $\text{Hom}_R(R/\mathfrak{a}, H_{I,J}^t(N))$ là minimax.
- (iii) Trong trường hợp N là minimax. Ta có $\text{Hom}_R(R/\mathfrak{a}, H_{I,J}^t(M, N))$ cũng là minimax với mọi $\mathfrak{a} \in \tilde{W}(I, J)$.

Chứng minh. (i) Ta sẽ dùng phương pháp chứng minh quy nạp theo t . Khi $t = 0$, ta có được điều phải chứng minh. Cho $t > 0$, dãy khớp ngắn

$$0 \rightarrow \Gamma_{I,J}(N) \rightarrow N \rightarrow \overline{N} \rightarrow 0$$

cho ta dãy khớp dài

$$\cdots \text{Ext}_R^i(R/\mathfrak{a}, \Gamma_{I,J}(N)) \rightarrow \text{Ext}_R^i(R/\mathfrak{a}, N) \rightarrow \text{Ext}_R^i(R/\mathfrak{a}, \overline{N}) \cdots$$

Vì $\Gamma_{I,J}(N)$ là minimax, việc chứng minh (i) sẽ hoàn thành bằng cách chứng minh rằng $\text{Ext}_R^i(R/\mathfrak{a}, \overline{N})$ là minimax với mọi $i < t$. Theo [58, 1.13], ta có $H_{I,J}^i(N) \cong H_{I,J}^i(\overline{N})$ với mọi $i > 0$ và $\Gamma_{I,J}(\overline{N}) = 0$. Ký hiệu $E = E(\overline{N})$ là bao nội xạ của $\overline{N}$ và $L = E/\overline{N}$. Lưu ý rằng $\text{Ass}_R(\Gamma_{I,J}(E)) = W(I, J) \cap \text{Ass}_R(E) = W(I, J) \cap \text{Ass}_R(\overline{N}) = \emptyset$, và do đó $\Gamma_{I,J}(E) = 0$. Dãy khớp ngắn

$$0 \rightarrow \overline{N} \rightarrow E \rightarrow L \rightarrow 0$$

dẫn đến đẳng cấu sau

$$H_{I,J}^i(L) \cong H_{I,J}^{i+1}(\overline{N}) \text{ và } \text{Ext}_R^i(R/\mathfrak{a}, L) \cong \text{Ext}_R^{i+1}(R/\mathfrak{a}, \overline{N})$$

với mọi $i \geq 0$.

Từ giả thiết quy nạp ta có $\text{Ext}_R^i(R/\mathfrak{a}, L)$ là minimax với mọi $i < t - 1$. Do đó $\text{Ext}_R^i(R/\mathfrak{a}, \overline{N})$ là minimax với mọi $i < t$ và việc chứng minh (i) đã hoàn thành.

(ii) Chúng ta sẽ dùng phương pháp quy nạp theo t . Khi $t = 0$, lưu ý rằng $\overline{N}$ là $\mathfrak{a}$ -xoắn-tự do, và do đó $\text{Hom}_R(R/\mathfrak{a}, \overline{N}) = 0$. Áp dụng hàm tử $\text{Hom}_R(R/\mathfrak{a}, -)$ cho dãy khớp sau

$$0 \rightarrow \Gamma_{I,J}(N) \rightarrow N \rightarrow \overline{N} \rightarrow 0$$

ta kết luận rằng $\text{Hom}_R(R/\mathfrak{a}, \Gamma_{I,J}(N)) \cong \text{Hom}_R(R/\mathfrak{a}, N)$ và khi đó $\text{Hom}_R(R/\mathfrak{a}, \Gamma_{I,J}(N))$ là minimax.

Giả sử rằng $t > 0$. Theo kết quả của (i), ta có

$$\begin{aligned} \text{Hom}_R(R/\mathfrak{a}, H_{I,J}^{t-1}(L)) &\cong \text{Hom}_R(R/\mathfrak{a}, H_{I,J}^t(\overline{N})) \\ &\cong \text{Hom}_R(R/\mathfrak{a}, H_{I,J}^t(N)). \end{aligned}$$

Theo giả thiết quy nạp, ta có $\text{Hom}_R(R/\mathfrak{a}, H_{I,J}^{t-1}(L))$ là minimax. Khi đó ta kết luận $\text{Hom}_R(R/\mathfrak{a}, H_{I,J}^t(N))$ là minimax.

(iii) Chúng ta sẽ dùng quy nạp theo t . Khi $t = 0$, ta có $H_{I,J}^0(M, N) \cong \text{Hom}_R(M, \Gamma_{I,J}(N))$ theo [40, 2.2]. Vì $\Gamma_{I,J}(N) \subseteq N$, $\text{Hom}_R(M, \Gamma_{I,J}(N))$ là minimax và khi đó $\text{Hom}_R(R/\mathfrak{a}, H_{I,J}^0(M, N))$ cũng là minimax.

Cho $t > 0$. Từ dãy khớp ngắn

$$0 \rightarrow \Gamma_{I,J}(N) \rightarrow N \rightarrow \overline{N} \rightarrow 0$$

kéo theo dãy khớp dài

$$\cdots \rightarrow H_{I,J}^i(M, \Gamma_{I,J}(N)) \rightarrow H_{I,J}^i(M, N) \rightarrow H_{I,J}^i(M, \overline{N}) \rightarrow \cdots .(*)$$

Theo kết quả [40, 2.6] ta suy ra $H_{I,J}^i(M, \Gamma_{I,J}(N)) \cong \text{Ext}_R^i(M, \Gamma_{I,J}(N))$ với mọi i , khi đó $H_{I,J}^i(M, \Gamma_{I,J}(N))$ là minimax với mọi i . Theo dãy khớp (*), việc chứng minh sẽ kết thúc nếu ta chứng minh được: $\text{Hom}_R(R/\mathfrak{a}, H_{I,J}^t(M, \overline{N}))$ là minimax. Vì $\overline{N}$ is (I, J) -xoắn-tự do, khi đó nó cũng là $\mathfrak{a}$ -xoắn-tự do với mọi $\mathfrak{a} \in \tilde{W}(I, J)$. Theo [32, 2.1] tồn tại một phần tử $\overline{N}$ -chính quy $x \in \mathfrak{a}$.

Từ dãy khớp ngắn

$$0 \rightarrow \overline{N} \xrightarrow{x} \overline{N} \rightarrow \overline{N}/x\overline{N} \rightarrow 0$$

dẫn đến dãy khớp dài sau

$$\cdots H_{I,J}^{t-1}(M, \overline{N}) \xrightarrow{f} H_{I,J}^{t-1}(M, \overline{N}/x\overline{N}) \xrightarrow{g} H_{I,J}^t(M, \overline{N}) \xrightarrow{x} H_{I,J}^t(M, \overline{N}) \cdots$$

Vì $H_{I,J}^i(\overline{N}) \cong H_{I,J}^i(N)$ với mọi $i > 0$, theo [42, 2.5] ta suy ra $H_{I,J}^i(M, \overline{N})$ là minimax với mọi $i < t$. Do đó $H_{I,J}^i(M, \overline{N}/x\overline{N})$ là minimax và vì vậy $H_{I,J}^i(\overline{N}/x\overline{N})$ là minimax với mọi $i < t - 1$. Lưu ý rằng $\overline{N}/x\overline{N}$ cũng là minimax. Theo giả thiết quy nạp suy ra $\text{Hom}_R(R/\mathfrak{a}, H_{I,J}^{t-1}(M, \overline{N}/x\overline{N}))$ là minimax.

Bằng cách chẻ ra từ hai dãy khớp trên, ta được hai dãy khớp:

$$0 \rightarrow \operatorname{Im} f \rightarrow H_{I,J}^{t-1}(M, \overline{N}/x\overline{N}) \rightarrow \operatorname{Im} g \rightarrow 0,$$

$$0 \rightarrow \operatorname{Im} g \rightarrow H_{I,J}^t(M, \overline{N}) \xrightarrow{x} H_{I,J}^t(M, \overline{N}).$$

Áp dụng hàm tử $\operatorname{Hom}_R(R/\mathfrak{a}, -)$ cho các dãy khớp này, ta có được các dãy khớp sau

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \operatorname{Hom}_R(R/\mathfrak{a}, \operatorname{Im} f) &\rightarrow \operatorname{Hom}_R(R/\mathfrak{a}, H_{I,J}^{t-1}(M, \overline{N}/x\overline{N})) \\ &\rightarrow \operatorname{Hom}_R(R/\mathfrak{a}, \operatorname{Im} g) \rightarrow \operatorname{Ext}_R^1(R/\mathfrak{a}, \operatorname{Im} f) \cdots, \end{aligned}$$

và dãy khớp

$$0 \rightarrow \operatorname{Hom}_R(R/\mathfrak{a}, \operatorname{Im} g) \rightarrow \operatorname{Hom}_R(R/\mathfrak{a}, H_{I,J}^t(M, \overline{N})) \xrightarrow{x} \operatorname{Hom}_R(R/\mathfrak{a}, H_{I,J}^t(M, \overline{N})).$$

Vì $H_{I,J}^{t-1}(M, \overline{N})$ là môđun minimax, $\operatorname{Im} f$ cũng là môđun minimax. Khi đó $\operatorname{Hom}_R(R/\mathfrak{a}, \operatorname{Im} g)$ cũng là minimax. Vì $x \in \mathfrak{a}$, dãy khớp cuối cho chúng ta đẳng cấu

$$\operatorname{Hom}_R(R/\mathfrak{a}, \operatorname{Im} g) \cong \operatorname{Hom}_R(R/\mathfrak{a}, H_{I,J}^t(M, \overline{N})).$$

Do đó $\operatorname{Hom}_R(R/\mathfrak{a}, H_{I,J}^t(M, \overline{N}))$ là minimax và việc chứng minh (iii) là hoàn thành. $\square$

Hệ quả 4.1.10. Cho M là R -môđun hữu hạn sinh, N là R -môđun tùy ý, t là số nguyên không âm sao cho $H_{I,J}^i(N)$ là minimax với mọi $i < t$.

- (i) Giả sử với $\mathfrak{a} \in \tilde{W}(I, J)$, $\operatorname{Ext}_R^t(R/\mathfrak{a}, N)$ là minimax và có một R -môđun hữu hạn sinh K sao cho $\operatorname{Supp}_R(K) \subseteq V(\mathfrak{a})$. Khi đó $\operatorname{Hom}_R(K, H_{I,J}^t(N))$ là môđun minimax.
- (ii) Nếu N là minimax và K là môđun con của $H_{I,J}^t(M, N)$ sao cho $\operatorname{Ext}_R^1(R/\mathfrak{a}, K)$ là minimax thì $\operatorname{Hom}_R(R/\mathfrak{a}, H_{I,J}^t(M, N)/K)$ cũng là minimax.

Chứng minh. (i) vì $\operatorname{Supp}_R(K) \subseteq V(\mathfrak{a})$, tồn tại một chuỗi hữu hạn $0 = K_0 \subseteq K_1 \subseteq \dots \subseteq K_n = K$ sao cho K_i/K_{i-1} là một ảnh đồng cấu của $(R/\mathfrak{a})^{m_i}$ với mọi $i = 1, 2, \dots, n$ theo Định lý Gruson. Khi đó, ta có dãy khớp ngắn

$$0 \rightarrow L_1 \rightarrow (R/\mathfrak{a})^{m_1} \rightarrow K_1 \rightarrow 0$$

với L_1 là một R -môđun và m_1 là một số nguyên dương. Từ đây, ta có dãy khớp dài

$$0 \rightarrow \text{Hom}_R(K_1, H_{I,J}^t(N)) \rightarrow \text{Hom}_R((R/\mathfrak{a})^{m_1}, H_{I,J}^t(N)) \rightarrow \text{Hom}_R(L_1, H_{I,J}^t(N)) \cdots$$

Mặt khác từ dãy khớp ngắn

$$0 \rightarrow L_2 \rightarrow (R/\mathfrak{a})^{m_2} \rightarrow K_2/K_1 \rightarrow 0.$$

Áp dụng hàm tử $\text{Hom}_R(-, H_{I,J}^t(N))$ cho dãy khớp ngắn này, ta có được dãy khớp dài

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \text{Hom}_R(K_2/K_1, H_{I,J}^t(N)) &\rightarrow \text{Hom}_R((R/\mathfrak{a})^{m_2}, H_{I,J}^t(N)) \\ &\rightarrow \text{Hom}_R(L_2, H_{I,J}^t(N)) \cdots \end{aligned}$$

Khi đó $\text{Hom}_R(K_1, H_{I,J}^t(N))$ và $\text{Hom}_R(K_2/K_1, H_{I,J}^t(N))$ là các môđun minimax theo Định lý 4.1.9(ii). Bằng cách dùng phương pháp quy nạp theo n , suy ra rằng $\text{Hom}_R(K_{n-1}, H_{I,J}^t(N))$ và $\text{Hom}_R(K/K_{n-1}, H_{I,J}^t(N))$ là các môđun minimax. Do đó $\text{Hom}_R(K, H_{I,J}^t(N))$ là minimax.

(ii) Áp dụng hàm tử $\text{Hom}_R(R/\mathfrak{a}, -)$ cho dãy khớp ngắn

$$0 \rightarrow K \rightarrow H_{I,J}^t(M, N) \rightarrow H_{I,J}^t(M, N)/K \rightarrow 0$$

Ta có được dãy khớp dài

$$\text{Hom}_R(R/\mathfrak{a}, H_{I,J}^t(M, N)) \rightarrow \text{Hom}_R(R/\mathfrak{a}, H_{I,J}^t(M, N)/K) \rightarrow \text{Ext}_R^1(R/\mathfrak{a}, K)$$

Áp dụng kết quả từ Định lý 4.1.9(iii) ta suy ra rằng $\text{Hom}_R(R/\mathfrak{a}, H_{I,J}^t(M, N))$ là minimax. Vì vậy, từ giả thuyết quy nạp ta có được điều phải chứng minh. $\square$

4.2 Tính cominimax của đối đồng điều địa phương suy rộng

Định nghĩa 4.2.1. Cho M, K là các R -môđun. Một R -môđun K được gọi là (I, M) -cominimax nếu $\text{Supp}_R(K) \subseteq V(I)$ và $\text{Ext}_R^i(M/IM; K)$ là minimax với mọi $i \geq 0$.

Mệnh đề 4.2.2. Cho M là R -môđun hữu hạn sinh. Khi đó môđun I -cominimax là môđun (I, M) -cominimax.

Chứng minh. Giả sử rằng K là một R -môđun I -cominimax. Theo giả thiết, $\text{Supp}_R(K) \subseteq V(I)$ và $\text{Ext}_R^i(R/I; K)$ là minimax với mọi $i \geq 0$. Cho $\overline{M} = M/IM$, khi đó $\overline{M}$ là hữu hạn sinh và $\text{Supp}_R(\overline{M}) \subseteq V(I)$. Chúng ta sẽ chứng minh $\text{Ext}_R^i(M/IM; K)$ là minimax bằng cách quy nạp theo i . Theo Định lý Gruson ([63, 4.1]), $\overline{M}$ luôn có chuỗi các môđun con

$$0 = M_0 \subseteq M_1 \subseteq \cdots \subseteq M_k = \overline{M}$$

thỏa mãn M_j/M_{j-1} ảnh đồng cấu của $(R/I)^m$ với mọi số nguyên dương m . Khi đó, ta xét dãy khớp ngắn

$$0 \rightarrow M_{j-1} \rightarrow M_j \rightarrow M_j/M_{j-1} \rightarrow 0$$

trong đó $1 \leq j \leq k$. Ta có một đẳng cấu $\text{Hom}((R/I)^m, K) \cong \text{Hom}(R/I, K)^m$. Vì K là R -môđun I -cominimax nên theo Nhận xét 4.1.2 ta có $\text{Hom}((R/I)^m, K)$ là minimax. Xét dãy khớp

$$0 \rightarrow \text{Hom}(M_j/M_{j-1}, K) \rightarrow \text{Hom}(M_j, K) \rightarrow \text{Hom}(M_{j-1}, K) \rightarrow \cdots$$

Từ đây dẫn đến $\text{Hom}(M_j, K)$ là minimax với mọi j và khi đó $\text{Hom}(\overline{M}, K)$ cũng là minimax. Ta kết luận mệnh đề đúng với $i = 0$.

Xét $i > 0$. Từ dãy khớp

$$0 \rightarrow M_{j-1} \rightarrow M_j \rightarrow (R/I)^m \rightarrow 0$$

Cho ta dãy khớp dài

$$\cdots \rightarrow \text{Ext}_R^{i-1}(M_{j-1}, K) \rightarrow \text{Ext}_R^i((R/I)^m, K) \rightarrow \text{Ext}_R^i(M_j, K) \rightarrow \cdots$$

Vì $\text{Ext}_R^i((R/I)^m, K) \cong \text{Ext}_R^i(R/I, K)^m$, nên ta có $\text{Ext}_R^i(M_1, K)$ là minimax. Mặt khác, theo giả thiết quy nạp $\text{Ext}_R^{i-1}(M_{j-1}, K)$ là minimax với mọi $j \leq k$. Bằng cách giải thích tương tự như trên, ta có kết quả $\text{Ext}_R^i(M_k, K)$ là minimax với mọi $i \geq 0$. Vậy, ta có điều phải chứng minh. $\square$

Bổ đề 4.2.3. Cho dãy khớp ngắn $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ của các R -môđun. Nếu hai trong các R -môđun trên là các (I, M) -cominimax thì R -môđun còn lại cũng là R -môđun (I, M) -cominimax.

Chứng minh. Ta luôn có

$$\text{Supp}_R B = \text{Supp}_R A \cup \text{Supp}_R C$$

Từ dãy khớp ngắn $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ ta dẫn đến dãy khớp dài

$$\cdots \rightarrow \text{Ext}_R^i(M/IM, A) \rightarrow \text{Ext}_R^i(M/IM, B) \rightarrow \text{Ext}_R^i(M/IM, C) \rightarrow \cdots$$

Kết hợp kết quả của Nhận xét 4.1.2 và giả thiết ta có được điều phải chứng minh. $\square$

Hệ quả 4.2.4. Cho đồng cấu $f : A \rightarrow B$ của các R -môđun (I, M) -cominimax. Nếu một trong các R -môđun $\text{Ker} f$, $\text{Im} f$ và $\text{Coker} f$ là R -môđun (I, M) -cominimax thì hai môđun còn lại cũng là R -môđun (I, M) -cominimax.

Như chúng ta đã biết trong vành địa phương $(R, \mathfrak{m})$ nếu T là một R -môđun hữu hạn sinh với $\text{Supp}_R T \subseteq \{\mathfrak{m}\}$, khi đó T là R -môđun Artin. Bây giờ tác giả nghiên cứu tính chất này trong trường hợp T là minimax.

Bổ đề 4.2.5. Cho vành địa phương $(R, \mathfrak{m})$ và T là R -môđun minimax sao cho $\text{Supp}_R T \subseteq \{\mathfrak{m}\}$. Khi đó T là R -môđun Artin.

Chứng minh. Giả sử rằng K là R -môđun hữu hạn sinh của T sao cho T/K là Artin. Theo giả thiết, $\text{Supp}_R K \subseteq \text{Supp}_R T \subseteq \{\mathfrak{m}\}$. Do đó, T cũng là R -môđun Artin. $\square$

Mệnh đề 4.2.6. Cho vành địa phương $(R, \mathfrak{m})$ và N là R -môđun $(\mathfrak{m}, M)$ -cominimax. Khi đó $\text{Hom}_R(M, N)$ là Artin.

Chứng minh. Theo giả thiết, $\text{Hom}_R(M/\mathfrak{m}M, N)$ là minimax. Hơn nữa, có một đẳng cấu $\text{Hom}_R(M/\mathfrak{m}M, N) \cong \text{Hom}_R(R/\mathfrak{m}, \text{Hom}_R(M, N))$. Áp dụng Bổ đề 4.2.5 ta có được $\text{Hom}_R(R/\mathfrak{m}, \text{Hom}_R(M, N))$ là R -môđun Artin. Hơn nữa, vì chúng ta có $\text{Supp}_R(\text{Hom}_R(M, N)) \subseteq \text{Supp}_R N \subseteq \{\mathfrak{m}\}$. Do đó, $\text{Hom}_R(M, N)$ là $\mathfrak{m}$ -xoắn. Theo [37, Định lý 1.3], ta kết luận rằng $\text{Hom}_R(M, N)$ là R -môđun Artin. $\square$

Định lý 4.2.7. Cho N là R -môđun (I, M) -cominimax. Khi đó $\text{Ass}_R(\text{Hom}_R(M, N))$ là hữu hạn.

Chứng minh. Ta có đẳng cấu $\text{Hom}_R(M/IM, N) \cong \text{Hom}_R(R/I, \text{Hom}_R(M, N))$. Kết hợp với giả thiết ta có $\text{Hom}_R(R/I, \text{Hom}_R(M, N))$ là R -môđun minimax. Theo Nhận xét 4.1.2, $\text{Ass}_R(\text{Hom}_R(R/I, \text{Hom}_R(M, N)))$ là hữu hạn. Hơn nữa, ta có kết quả $\text{Ass}_R(\text{Hom}_R(R/I, \text{Hom}_R(M, N))) = V(I) \cap \text{Ass}_R(\text{Hom}_R(M, N))$. Vì $\text{Supp}_R N \subseteq V(I)$ và $\text{Supp}_R(\text{Hom}_R(M, N)) \subseteq \text{Supp}_R N$. Do đó, ta kết luận rằng $\text{Ass}_R(\text{Hom}_R(M, N))$ là hữu hạn. $\square$

Định lý 4.2.8. Cho t là số nguyên không âm. Cho M là R -môđun hữu hạn sinh và N là R -môđun sao cho $H_I^i(N)$ là R -môđun (I, M) -cominimax với mọi số nguyên $i < t$. Khi đó:

- (i) $\text{Ext}_R^i(M/IM, N)$ là minimax với mọi $i < t$;
- (ii) Giả sử rằng M là R -môđun xạ ảnh và $\text{Ext}_R^t(M/IM, N)$ là minimax. Khi đó: $\text{Hom}_R(R/I, H_I^t(M, N))$ là minimax.

Chứng minh. (i). Cho $F = \text{Hom}_R(M/IM, -)$ và $G = \Gamma_I(-)$ là hàm tử từ phạm trù các R -môđun vào chính nó. N là R -môđun, $FG(N) = \text{Hom}_R(M/IM, \Gamma_I(N)) \cong \text{Hom}_R(M/IM, N)$. Nếu E là R -môđun nội xạ, khi đó theo ([12, Mệnh đề 2.1.4]) ta có $G(E) = \Gamma_I(E)$ là nội xạ. Do đó: $R^i F(G(E)) = 0$. Áp dụng [52, Định lý 10.47] có sự tồn tại của dãy phổ:

$$E_2^{p,q} = \text{Ext}_R^p(M/IM, H_I^q(N)) \Rightarrow \text{Ext}_R^{p+q}(M/IM, N)$$

Cho $n < t$, ta có một cái lọc Φ các R -môđun con của $H^n = \text{Ext}_R^{p+q}(M/IM, N)$ như sau

$$0 = \Phi^{n+1} H^n \subseteq \Phi^n H^n \subseteq \dots \subseteq \Phi^1 H^n \subseteq \Phi^0 H^n = H^n$$

sao cho

$$E_\infty^{i,n-i} \cong \Phi^i H^n / \Phi^{i+1} H^n$$

với mọi $0 \leq i \leq n$ ($n = p + q$). Theo giả thiết, $E_2^{p,q}$ là minimax với mọi số nguyên $p \geq 0, q < 0$. Vì $E_\infty^{i,n-i}$ là môđun con của $E_2^{i,n-i}$, nên suy ra $E_\infty^{i,n-i}$ là minimax với mọi $0 \leq i \leq n$. Vì vậy $\Phi^0 H^n = H^n = \text{Ext}_R^t(M/IM, N)$ là minimax.

(ii). Chúng ta sẽ dùng phương pháp chứng minh quy nạp theo t . Cho $t = 0$, ta có

$$\text{Hom}_R(R/I, H_I^0(M, N)) \cong \text{Hom}_R(R/I, \text{Hom}_R(M, N)) \cong \text{Hom}_R(M/IM, N)$$

Trong trường hợp này, kết quả hoàn toàn đúng theo giả thiết cho.

Ta xét trường hợp $t > 0$ và đặt $\bar{N} = N/\Gamma_I(N)$. Khi đó $\bar{N}$ là R -môđun I -xoắn-tự do. Theo [12, Mệnh đề 2.1.7] ta có $H_I^i(N) \cong H_I^i(\bar{N})$ với mọi $i > 0$. Giả thiết nói lên rằng $H_I^i(\bar{N})$ là R -môđun (I, M) -cominimax với mọi $i < t$. Từ dãy khớp ngắn $0 \rightarrow \Gamma_I(N) \rightarrow N \rightarrow \bar{N} \rightarrow 0$ cho dãy khớp dài

$$\cdots \rightarrow \text{Ext}_R^i(M/IM, \Gamma_I(N)) \rightarrow \text{Ext}_R^i(M/IM, N) \rightarrow \text{Ext}_R^i(M/IM, \bar{N}) \rightarrow \cdots$$

Vì $\Gamma_I(N)$ là R -môđun (I, M) -cominimax và $\text{Ext}_R^i(M/IM, N)$ là minimax, cho nên theo dãy khớp dài trên thì $\text{Ext}_R^i(M/IM, \bar{N})$ là minimax. Bây giờ, ta đặt $E = E(\bar{N})$ là bao nội xạ của $\bar{N}$. Khi đó, dãy khớp ngắn $0 \rightarrow \bar{N} \rightarrow E \rightarrow E/\bar{N} \rightarrow 0$ cho ta kết quả $H_I^i(E/\bar{N}) \cong H_I^{i+1}(N)$ với mọi $i \geq 0$ và $\text{Ext}_R^{t-1}(M/IM, E/\bar{N}) \cong \text{Ext}_R^t(M/IM, \bar{N})$. Những đẳng cấu này cho ta kết luận rằng $H_I^i(E/\bar{N})$ là R -môđun (I, M) -cominimax với mọi $i < t - 1$ và $\text{Ext}_R^{t-1}(M/IM, E/\bar{N})$ là minimax. Khi đó, theo giả thiết quy nạp $\text{Hom}_R(R/I, H_I^{t-1}(M, E/\bar{N}))$ là minimax. Hơn nữa, dãy khớp ngắn trên còn cho ta đẳng cấu $H_I^i(M, E/\bar{N}) \cong H_I^{i+1}(M, \bar{N})$ với mọi $i \geq 0$. Do đó, ta có kết quả là $\text{Hom}_R(R/I, H_I^t(M, \bar{N}))$ là minimax. Mặt khác, từ dãy khớp ngắn $0 \rightarrow \Gamma_I(N) \rightarrow N \rightarrow \bar{N} \rightarrow 0$ sẽ cho chúng ta dãy khớp dài

$$\cdots \rightarrow H_I^i(M, \Gamma_I(N)) \rightarrow H_I^i(M, N) \rightarrow H_I^i(M, \bar{N}) \rightarrow \cdots$$

Áp dụng [64, Bổ đề 1.1] ta có kết quả $H_I^i(M, \Gamma_I(N)) \cong \text{Ext}_R^i(M, \Gamma_I(N))$ với mọi $i \geq 0$. Vì M là R -môđun xạ ảnh nên $H_I^i(M, \Gamma_I(N)) = 0$ với mọi $i > 0$. Khi đó $H_I^i(M, N) \cong H_I^i(M, \bar{N})$. Vậy $\text{Hom}_R(R/I, H_I^t(M, N))$ là minimax. $\square$

Hệ quả 4.2.9. *Cho t là số nguyên không âm. Cho M là R -môđun xạ ảnh hữu hạn sinh và N là R -môđun minimax sao cho $H_I^i(N)$ là R -môđun (I, M) -cominimax với mọi số nguyên $i < t$. Khi đó $\text{Hom}_R(R/I, H_I^t(M, N))$ là minimax và $\text{Ass}_R(H_I^t(M, N))$ là hữu hạn.*

Chứng minh. Theo Định lý 4.2.8 và Nhận xét 4.1.2, ta có $\text{Hom}_R(R/I, H_I^t(M, N))$ là minimax và $\text{Ass}_R(\text{Hom}_R(R/I, H_I^t(M, N)))$ là hữu hạn. Mặt khác

$$\text{Ass}_R(\text{Hom}_R(R/I, H_I^t(M, N))) = V(I) \cap \text{Ass}_R(H_I^t(M, N)).$$

Vì $H_I^t(M, N)$ là I -xoắn nên $\text{Ass}_R(H_I^t(M, N)) \subseteq V(I)$.

Nên $\text{Ass}_R(\text{Hom}_R(R/I, H_I^t(M, N))) = \text{Ass}_R(H_I^t(M, N))$ là hữu hạn. $\square$

Hệ quả 4.2.10. Cho t là số nguyên không âm và N là R -môđun minimax sao cho $H_I^i(N)$ là R -môđun I -cominimax với mọi số nguyên $i < t$. Khi đó $\text{Hom}_R(R/I, H_I^t(M, N))$ là minimax.

Định lý 4.2.11. Cho M là R -môđun xạ ảnh hữu hạn sinh và N là R -môđun. Nếu $H_I^i(M, N)$ là R -môđun I -cominimax với mọi i thì $\text{Ext}_R^i(M/IM, N)$ là minimax với mọi i .

Chứng minh. Bây giờ ta sẽ chứng minh quy nạp theo i . Khi $i = 0$, ta có

$$\text{Hom}_R(M/IM, N) \cong \text{Hom}_R(R/I, \text{Hom}_R(M, N)) \cong \text{Hom}_R(R/I, H_I^0(M, N))$$

Vì $H_I^0(M, N)$ là R -môđun I -cominimax nên $\text{Hom}_R(R/I, H_I^0(M, N))$ là minimax. Do đó $\text{Hom}_R(M/IM, N)$ là minimax. Cho $i > 0$, ta xét dãy khớp ngắn

$$0 \rightarrow \Gamma_I(N) \rightarrow N \rightarrow \overline{N} \rightarrow 0$$

từ đây cho ta dãy khớp dài

$$\dots \rightarrow \text{Ext}_R^i(M/IM, \Gamma_I(N)) \rightarrow \text{Ext}_R^i(M/IM, N) \rightarrow \text{Ext}_R^i(M/IM, \overline{N}) \rightarrow \dots$$

Vì M là R -môđun xạ ảnh hữu hạn sinh, nên ta có $\text{Ext}_R^j(M/IM, \Gamma_I(N)) \cong \text{Ext}_R^j(R/I, \text{Hom}_R(M, \Gamma_I(N))) \cong \text{Ext}_R^j(R/I, \Gamma_I(M, N))$ là minimax với mọi $j \geq 0$. Chúng ta cần phải chứng minh $\text{Ext}_R^j(M/IM, \overline{N})$ là minimax. Bây giờ, ta đặt $E = E(\overline{N})$ là bao nội xạ của $\overline{N}$. Khi đó, dãy khớp ngắn $0 \rightarrow \overline{N} \rightarrow E \rightarrow E/\overline{N} \rightarrow 0$ sẽ cho ta các kết quả sau: $H_I^j(M, E/\overline{N}) \cong H_I^{j+1}(M, \overline{N})$ và $\text{Ext}_R^j(M/IM, E/\overline{N}) \cong \text{Ext}_R^{j+1}(M/IM, \overline{N})$ với mọi $j \geq 0$. Áp dụng giả thiết và chứng minh trên, ta có $H_I^i(M, \overline{N})$ là R -môđun I -cominimax với mọi i . Do đó $H_I^i(M, E/\overline{N})$ là R -môđun I -cominimax với mọi i . Áp dụng giả thiết quy nạp ta có $\text{Ext}_R^{i-1}(M/IM, E/\overline{N})$ là minimax và do đó $\text{Ext}_R^i(M/IM, \overline{N})$ là minimax. Vậy ta kết luận $\text{Ext}_R^i(M/IM, N)$ là minimax với mọi i . $\square$

Hệ quả 4.2.12. *Cho N là R -môđun sao cho $H_I^i(N)$ là I -cominimax với mọi i . Khi đó $\text{Ext}_R^i(R/I, N)$ là minimax với mọi i .*

Chương 5

Tập idêan nguyên tố liên kết, gắn kết của đối đồng điều địa phương suy rộng theo một cặp idêan

Chương 5 trình bày về tập idêan nguyên tố liên kết, gắn kết của các môđun đối đồng điều địa phương $H_{I,J}^i(M)$ và $H_I^i(M)$ được nhóm tác giả công bố trong các bài báo [47, 62]. Trong đó trình bày rõ về tập idêan nguyên tố liên kết của đối đồng điều địa phương theo một cặp idêan, đối đồng điều địa phương suy rộng theo một cặp idêan, các mối liên hệ giữa chúng. Chúng tôi trình bày một số kết quả về tính hữu hạn tập các idêan nguyên tố liên kết của các đối đồng điều địa phương liên quan đến giả thiết của Grothendieck và những vấn đề đặt ra của Huneke. Trong [67] Grothendieck đưa ra giả thiết: Cho bất kỳ idêan I của vành R và bất kỳ R -môđun hữu hạn sinh M , khi đó $\text{Hom}_R(R/I, H_I^i(M))$ là hữu hạn sinh, với mọi i . Một câu hỏi đặt ra của Huneke [28]: Nếu M là hữu hạn sinh, khi đó tập các idêan nguyên tố liên kết của môđun đối đồng điều địa phương $H_I^i(M)$ có luôn là hữu hạn? Chúng tôi cũng quan tâm đến tính hữu hạn của tập các idêan nguyên tố liên kết của các môđun đối đồng điều địa phương liên quan mật thiết với chuẩn tổng thể địa phương (local-global-principle) đối với chiều hữu hạn của G . Faltings [22]. Một điều mà nhiều học giả quan tâm đến giả thiết của Grothendieck trong [26] và câu hỏi của Huneke và hiện chưa có lời giải trong trường hợp tổng quát bởi đang có nhiều vấn đề mâu thuẫn được đưa ra trong [29, 56].

5.1 Tập idêan nguyên tố liên kết của đối đồng điều địa phương theo một cặp idêan

Chúng tôi nghiên cứu về tính hữu hạn của tập $\text{Ass}_R(\text{Hom}_R(R/\mathfrak{a}, H_{I,J}^t(M)))$. Trong [18, 2.1], Một R -môđun M được gọi là Lasker yếu nếu tập hợp các idêan nguyên tố liên kết của bất kỳ môđun thương của M là hữu hạn. Khi đó, tập các idêan nguyên tố liên kết của các môđun Lasker yếu là hữu hạn. Trong [40, 2.5], nhóm tác giả đã chứng minh rằng $\text{Ass}_R(\text{Hom}_R(R/I, H_{I,J}^t(M)))$ là hữu hạn khi $H_{I,J}^i(M)$ là (I, J) -đối hữu hạn yếu với mọi $i < t$. Từ đây, chúng tôi đã nghiên cứu được kết quả có tính tổng quát hơn như định lý dưới đây.

Định lý 5.1.1. *Cho M là R -môđun và $\mathfrak{a} \in \tilde{W}(I, J)$. Cho t là số nguyên không âm và $k = 0$ hoặc $k = 1$. Nếu $\text{Ext}_R^{t+k}(R/\mathfrak{a}, M)$ và $\text{Ext}_R^{t+1+k-i}(R/\mathfrak{a}, H_{I,J}^i(M))$ là Lasker yếu với $i < t$ thì môđun $\text{Ext}_R^k(R/\mathfrak{a}, H_{I,J}^t(M))$ cũng là Lasker yếu. Trong trường hợp đặc biệt, tập $\text{Ass}_R(\text{Hom}_R(R/\mathfrak{a}, H_{I,J}^t(M)))$ là hữu hạn.*

Chứng minh. Cho $F(-) := \text{Hom}_R(R/\mathfrak{a}, -)$ và $G(-) := \Gamma_{I,J}(-)$ là các hàm tử từ tập các R -môđun vào chính nó. Vì $M/\Gamma_{I,J}(M)$ là (I, J) -xoắn tự do nên nó là $\mathfrak{a}$ -xoắn tự do và $R/\mathfrak{a}$ cũng là $\mathfrak{a}$ -xoắn. Do đó $\text{Hom}_R(R/\mathfrak{a}, M/\Gamma_{I,J}(M)) = 0$. Từ dãy khớp ngắn $0 \rightarrow \Gamma_{I,J}(M) \rightarrow M \rightarrow M/\Gamma_{I,J}(M) \rightarrow 0$ ta tác động hàm tử $\text{Hom}_R(R/\mathfrak{a}, -)$ lên dãy khớp ngắn và được $\text{Hom}_R(R/\mathfrak{a}, \Gamma_{I,J}(M)) = \text{Hom}_R(R/\mathfrak{a}, M)$. Từ đây ta được $FG(M) = \text{Hom}_R(R/\mathfrak{a}, M)$ với mọi R -môđun M và $G(E)$ là F -acyclic phải với bất kỳ R -môđun nội xạ E . Theo [52, 10.47] tồn tại một dãy phổ Grothendieck

$$E_2^{j,i} = \text{Ext}_R^j(R/\mathfrak{a}, H_{I,J}^i(M)) \Rightarrow_j \text{Ext}_R^{j+i}(R/\mathfrak{a}, M).$$

vì $E_r^{t+1+k-i,i}$ là thương con của $E_2^{t+1+k-i,i}$ nên theo giả thiết $E_r^{t+1+k-i,i}$ là Lasker yếu với mọi $i < t$ và $r \geq 2$. Từ đồng cấu của dãy phổ

$$0 = E_{t+2}^{k-t-2, 2t+1} \rightarrow E_{t+2}^{k,t} \rightarrow E_{t+2}^{k+t+2, -1} = 0$$

Ta có được $E_{t+2}^{k,t} = E_{t+3}^{k,t} = \dots = E_{\infty}^{k,t}$. Bây giờ, tồn tại một lọc của $H^{t+k} = \text{Ext}_R^{t+k}(R/\mathfrak{a}, M)$ là

$$0 = \Phi^{t+k+1} H^{t+k} \subseteq \Phi^{t+k} H^{t+k} \subseteq \dots \subseteq \Phi^1 H^{t+k} \subseteq \Phi^0 H^{t+k} = H^{t+k}$$

sao cho

$$E_{\infty}^{i,t+k-i} \cong \Phi^i H^{t+k} / \Phi^{i+1} H^{t+k}$$

với mọi $i \leq t+k$. Vì $\text{Ext}_R^{t+k}(R/\mathfrak{a}, M)$ là Lasker yếu nên $E_{\infty}^{i,t+k-i}$ cũng là Lasker yếu với mọi $i \leq t+k$. Đặc biệt, $E_{t+2}^{k,t} = E_{\infty}^{k,t}$ là Lasker yếu. Để chứng minh rằng $E_r^{k,t}$ là Lasker yếu với mọi $2 \leq r \leq t+2$, chúng ta sẽ dùng phương pháp chứng minh quy nạp giảm dần theo r . Giả sử rằng $E_{r+1}^{k,t}$ là Lasker yếu và chúng ta xét các đồng cấu dãy phổ

$$0 \rightarrow E_r^{k,t} \xrightarrow{d_r^{k,t}} E_r^{k+r,t-r+1}.$$

Lưu ý rằng $\text{Ker} d_r^{k,t} = E_{r+1}^{k,t}$ là Lasker yếu và $\text{Im} d_r^{k,t}$ là môđun con của môđun Lasker yếu $E_r^{k+r,t-r+1}$. Do đó $E_r^{k,t}$ là Lasker yếu với mọi $2 \leq r \leq t+2$. Từ những chứng minh trên, ta kết luận $E_2^{k,t} = \text{Ext}_R^k(R/\mathfrak{a}, H_{I,J}^t(M))$ là Lasker yếu. Đặc biệt khi $k=0$, $\text{Ass}_R(\text{Hom}_R(R/\mathfrak{a}, H_{I,J}^t(M)))$ là một tập hữu hạn. $\square$

Chúng ta dẫn đến các kết quả tiếp theo sau

Hệ quả 5.1.2. *Cho M là R -môđun Lasker yếu và t là số nguyên không âm. Nếu $H_{I,J}^i(M)$ là Lasker yếu với mọi $i < t$ thì $\text{Ass}_R(\text{Hom}_R(R/\mathfrak{a}, H_{I,J}^t(M)))$ là hữu hạn với bất kỳ $\mathfrak{a} \in \tilde{W}(I, J)$.*

Chứng minh. Điều này được suy ra từ giả thiết rằng $\text{Ext}_R^j(R/\mathfrak{a}, H_{I,J}^i(M))$ là Lasker yếu với mọi $i < t, j \geq 0$. Từ Định lý 5.1.1 chúng ta suy ra được điều phải chứng minh. $\square$

Chúng ta nhắc lại rằng R -môđun K được gọi là (I, J) -đối hữu hạn yếu nếu $\text{Supp}_R(K) \subseteq W(I, J)$ và $\text{Ext}_R^i(R/I, K)$ là Lasker yếu với mọi $i \geq 0$.

Hệ quả 5.1.3. *[40, Định lý 2.5] Cho M là R -môđun Lasker yếu và t là một số nguyên không âm sao cho $H_{I,J}^i(M)$ là (I, J) -đối hữu hạn yếu với mọi $i < t$. Khi đó $\text{Hom}_R(R/I, H_{I,J}^t(M))$ cũng là Lasker yếu. Đặc biệt, $\text{Ass}_R(\text{Hom}_R(R/I, H_{I,J}^t(M)))$ là hữu hạn.*

Mệnh đề 5.1.4. *Cho M là R -môđun Lasker yếu, $\mathfrak{a} \in \tilde{W}(I, J)$ và t là một số nguyên không âm sao cho $H_{I,J}^i(M)$ là (I, J) -đối hữu hạn yếu với mọi $i < t$ và $\text{Ass}_R(\text{Ext}_R^2(R/\mathfrak{a}, H_{I,J}^t(M)))$ là hữu hạn. Khi đó $\text{Ass}_R(\text{Hom}_R(R/\mathfrak{a}, H_{I,J}^{t+1}(M)))$ là hữu hạn.*

Chứng minh. Từ dãy phổ Grothendieck

$$E_2^{j,i} = \text{Ext}_R^j(R/\mathfrak{a}, H_{I,J}^i(M)) \Rightarrow_j \text{Ext}_R^{j+i}(R/\mathfrak{a}, M)$$

Ta xét các đồng cấu dãy phổ

$$0 \rightarrow E_r^{0,t+1} \xrightarrow{d_r^{0,t+1}} E_r^{t-r+2}$$

với mọi $r \geq 2$. Lưu ý rằng $\text{Ker}(d_{t+2}^{0,t+1}) = E_{t+3}^{0,t+1} = E_{t+4}^{0,t+1} = \dots = E_\infty^{0,t+1}$ và $E_\infty^{0,t+1}$ là đẳng cấu với môđun thương của $\text{Ext}_R^{t+1}(R/\mathfrak{a}, M)$. Vì M là Lasker yếu nên ta có $\text{Ker}(d_{t+2}^{0,t+1})$ là Lasker yếu. Theo giả thiết, $E_2^{t+2,0}$ là Lasker yếu và do đó $E_{t+2}^{t+2,0}$ cũng là Lasker yếu bởi vì $E_{t+2}^{t+2,0}$ là thương con của $E_2^{t+2,0}$. Điều này dẫn đến $E_{t+2}^{0,t+1}$ là Lasker yếu. Bây giờ, ta dùng phương pháp quy nạp giảm dần để chứng minh rằng $E_r^{0,t+1}$ là Lasker yếu với mọi $3 \leq r \leq t+1$. Trước tiên, từ các đồng cấu

$$0 \rightarrow E_{t+1}^{0,t+1} \xrightarrow{d_{t+1}^{0,t+1}} E_{t+1}^{t+1,1}$$

và giả thiết cho, ta kết luận rằng $E_{t+1}^{0,t+1}$ là Lasker yếu. Bằng cách giải thích tương tự, $E_r^{0,t+1}$ là Lasker yếu với mọi $3 \leq r \leq t+1$. Đặc biệt, $E_3^{0,t+1} = \text{Ker}(d_2^{0,t+1})$ và $\text{Im}(d_2^{0,t+1}) \subseteq E_2^{2,t}$ có hữu hạn các ideal nguyên tố liên kết. Do đó, từ đồng cấu dãy phổ

$$0 \rightarrow E_2^{0,t+1} \xrightarrow{d_2^{0,t+1}} E_2^{2,t}$$

ta có $\text{Ass}_R(E_2^{0,t+1}) = \text{Ass}_R(\text{Hom}_R(R/\mathfrak{a}, H_{I,J}^{t+1}(M)))$ là hữu hạn. $\square$

Mệnh đề 5.1.5. Cho M là R -môđun và $\mathfrak{a} \in \tilde{W}(I, J)$. Cho t là số nguyên không âm. Nếu $\text{Ext}_R^j(R/\mathfrak{a}, H_{I,J}^i(M))$ là Lasker yếu với mọi số nguyên $i \geq 0, j \geq 0$ với $i + j \leq t$ thì $\text{Ext}_R^n(R/\mathfrak{a}, M)$ là Lasker yếu với mọi $n \leq t$.

Chứng minh. Ta dùng dãy phổ Grothendieck trong phần chứng minh của Định lý 5.1.1

$$E_2^{j,i} = \text{Ext}_R^j(R/\mathfrak{a}, H_{I,J}^i(M)) \Rightarrow_j \text{Ext}_R^{j+i}(R/\mathfrak{a}, M).$$

Khi đó tồn tại cái lọc Φ của $H^n = \text{Ext}_R^n(R/\mathfrak{a}, M)$

$$0 = \Phi^{n+1}H^n \subseteq \Phi^n H^n \subseteq \dots \subseteq \Phi^1 H^n \subseteq \Phi^0 H^n = H^n$$

sao cho

$$E_\infty^{i,n-i} \cong \Phi^i H^n / \Phi^{i+1} H^n$$

với mọi $i \leq n \leq t$. Vì $E_\infty^{i,n-i}$ là thương con của $E_2^{i,n-i}$, theo giả thiết ta suy ra rằng $E_\infty^{i,n-i}$ là Lasker yếu với mọi $i \leq n$. Lưu ý rằng $E_\infty^{n,0} \cong \Phi^n H^n$ là Lasker yếu. Để chứng minh rằng $\Phi^k H^n$ là Lasker yếu với mọi số nguyên không âm $k \leq n$ chúng ta cần dùng phương pháp quy nạp giảm dần theo k . Giả sử rằng $\Phi^k H^n$ là Lasker yếu, nó vẫn đúng cho trường hợp $\Phi^{k-1} H^n$ là Lasker yếu. Từ dãy khớp này

$$0 \rightarrow \Phi^k H^n \rightarrow \Phi^{k-1} H^n \rightarrow E_\infty^{k-1,n-k+1} \rightarrow 0$$

cho ta kết quả $\Phi^{k-1} H^n$ là Lasker yếu và khi đó ta có thể kết luận rằng $\Phi^0 H^n = \text{Ext}_R^n(R/\mathfrak{a}, M)$ là Lasker yếu. $\square$

Định lý tiếp theo cho chúng ta một kết quả liên quan đến tính hữu hạn của tập $\text{Ass}_R(\text{Hom}_R(R/I, H_{I,J}^t(M)))$.

Định lý 5.1.6. *Cho M là R -môđun Lasker yếu và t là số nguyên không âm thỏa $H_{I,J}^i(M)$ là (I, J) -đôi hữu hạn yếu với mọi $i < t$. Khi đó $\text{Hom}_R(R/I, H_{I,J}^t(M))$ cũng là Lasker yếu. Đặc biệt, tập $\text{Ass}_R(\text{Hom}_R(R/I, H_{I,J}^t(M)))$ là hữu hạn.*

Chứng minh. Xét các hàm tử $F = \text{Hom}_R(R/I, -)$ và $G = \Gamma_{I,J}(-)$. Rõ ràng

$$FG = \text{Hom}_R(R/I, \Gamma_{I,J}(-)) = \text{Hom}_R(R/I, -).$$

Nếu E là R -môđun nội xạ thì $G(E)$ là F -acyclic phải. Theo Định lý 1.1.5 ta có dãy phổ Grothendieck

$$E_2^{p,q} = \text{Ext}_R^p(R/I, H_{I,J}^q(M)) \Rightarrow_p \text{Ext}_R^{p+q}(R/I, M).$$

Theo giả thiết $E_2^{p,q}$ là Lasker yếu với mọi $p \geq 0$ và $0 \leq q < t$. Do đó $E_\infty^{p,q}$ cũng là Lasker yếu bởi vì $E_\infty^{p,q}$ là thương con của $E_2^{p,q}$. Tiếp theo, tồn tại lọc Φ là các môđun con của $H^t = \text{Ext}_R^t(R/I, M)$

$$0 = \Phi^{t+1} H^t \subseteq \Phi^t H^t \subseteq \dots \subseteq \Phi^1 H^t \subseteq \Phi^0 H^t = H^t$$

thỏa mãn

$$E_\infty^{i,t-i} \cong \Phi^i H^t / \Phi^{i+1} H^t$$

với mọi $i \leq t$. Từ dãy khớp ngắn

$$0 \rightarrow \Phi^1 H^t \rightarrow H^t \rightarrow E_\infty^{0,t} \rightarrow 0$$

suy ra $E_\infty^{0,t}$ là Lasker yếu vì $H^t = \text{Ext}_R^t(R/I, M)$ là Lasker yếu.

Xét các đồng cấu của dãy phổ

$$E_k^{-k,t+k-1} \xrightarrow{d^{-k,t+k-1}} E_k^{0,t} \xrightarrow{d^{0,t}} E_k^{k,t+1-k}.$$

Vì $E_k^{-k,t+k-1} = 0$ với mọi $k \geq 2$ nên $\text{Ker} d_k^{0,t} = E_{k+1}^{0,t}$ và $E_k^{k,t+1-k} = 0$ với mọi $k \geq t+2$. Suy ra $E_{t+2}^{0,t} = E_{t+3}^{0,t} = \dots = E_\infty^{0,t}$ và do đó $E_{t+2}^{0,t}$ là Lasker yếu. Từ các đồng cấu dãy phổ

$$0 \longrightarrow E_{k+2}^{0,t} \longrightarrow E_{k+1}^{0,t} \xrightarrow{d^{0,t}} E_{k+1}^{k+1,t-k}$$

cho ta kết quả $E_{k+1}^{0,t}$ là Lasker yếu với mọi $1 \leq k \leq t$.

Đặc biệt, $E_2^{0,t} = \text{Hom}_R(R/I, H_{I,J}^t(M))$ là Lasker yếu. $\square$

Từ Định lý 5.1.6, ta có một Hệ quả sau.

Hệ quả 5.1.7. Cho M là R -môđun Lasker yếu và t một số nguyên không âm. Nếu $H_{I,J}^i(M)$ là Lasker yếu với mọi $i < t$ thì $\text{Hom}_R(R/I, H_{I,J}^t(M)/N)$ cũng là Lasker yếu, với N là R -môđun con Lasker yếu của $H_{I,J}^t(M)$. Đặc biệt, tập $\text{Ass}_R(\text{Hom}_R(R/I, H_{I,J}^t(M)/N))$ là hữu hạn.

Chứng minh. Dãy khớp ngắn

$$0 \rightarrow N \rightarrow H_{I,J}^t(M) \rightarrow H_{I,J}^t(M)/N \rightarrow 0$$

cảm sinh dãy khớp dài

$$\dots \rightarrow \text{Hom}_R(R/I, H_{I,J}^t(M)) \rightarrow \text{Hom}_R(R/I, H_{I,J}^t(M)/N) \rightarrow \text{Ext}_R^1(R/I, N) \rightarrow \dots$$

Theo Bổ đề 2.1.2(ii), $\text{Ext}_R^1(R/I, N)$ là một R -môđun Lasker yếu. Định lý 5.1.6 suy ra $\text{Hom}_R(R/I, H_{I,J}^t(M))$ cũng là Lasker yếu. Khi đó $\text{Hom}_R(R/I, H_{I,J}^t(M)/N)$ là Lasker yếu. $\square$

5.2 Tập idêan nguyên tố liên kết của đối đồng điều địa phương suy rộng theo một cặp idêan

Mệnh đề 5.2.1. Cho M là hữu hạn sinh và t là số nguyên không âm. Nếu N là Lasker yếu và $H_{I,J}^i(M, N)$ là Lasker yếu với mọi $i < t$ thì $\text{Hom}_R(R/\mathfrak{a}, H_{I,J}^t(M, N))$ là Lasker yếu với mọi $\mathfrak{a} \in \tilde{W}(I, J)$.

Chứng minh. Chúng ta sẽ chứng minh quy nạp theo t . Khi $t = 0$, ta có

$$\mathrm{Hom}_R(R/\mathfrak{a}, H_{I,J}^0(M, N)) \cong \mathrm{Hom}_R(R/\mathfrak{a}, \mathrm{Hom}_R(M, \Gamma_{I,J}(N))).$$

Vì $\Gamma_{I,J}(N) \subseteq N$ nên ta có $\mathrm{Hom}_R(R/\mathfrak{a}, H_{I,J}^0(M, N))$ là Lasker yếu theo giả thiết.

Cho $t > 0$ và $\overline{N} = N/\Gamma_{I,J}(N)$, ta có dãy khớp ngắn

$$0 \rightarrow \Gamma_{I,J}(N) \rightarrow N \rightarrow \overline{N} \rightarrow 0$$

cảm sinh ra dãy khớp dài

$$\cdots \rightarrow H_{I,J}^t(M, \Gamma_{I,J}(N)) \xrightarrow{f} H_{I,J}^t(M, N) \xrightarrow{g} H_{I,J}^t(M, \overline{N}) \rightarrow \cdots .$$

Dãy khớp dài này cho chúng ta dãy khớp

$$0 \rightarrow \mathrm{Im} f \rightarrow H_{I,J}^t(M, N) \rightarrow \mathrm{Im} g \rightarrow 0$$

và

$$0 \rightarrow \mathrm{Im} g \rightarrow H_{I,J}^t(M, \overline{N}) \xrightarrow{h} H_{I,J}^{t+1}(M, \Gamma_{I,J}(N)) \rightarrow \cdots .$$

Bằng cách áp dụng hàm tử $\mathrm{Hom}_R(R/\mathfrak{a}, -)$ cho các dãy khớp trên, ta thu được các dãy khớp

$$0 \rightarrow \mathrm{Hom}_R(R/\mathfrak{a}, \mathrm{Im} f) \rightarrow \mathrm{Hom}_R(R/\mathfrak{a}, H_{I,J}^t(M, N)) \rightarrow \mathrm{Hom}_R(R/\mathfrak{a}, \mathrm{Im} g) \rightarrow \cdots$$

và

$$0 \rightarrow \mathrm{Hom}_R(R/\mathfrak{a}, \mathrm{Im} g) \rightarrow \mathrm{Hom}_R(R/\mathfrak{a}, H_{I,J}^t(M, \overline{N})) \rightarrow \mathrm{Hom}_R(R/\mathfrak{a}, \mathrm{Im} h) \rightarrow \cdots .$$

Từ [40, 2.6] suy ra rằng $H_{I,J}^i(M, \Gamma_{I,J}(N)) \cong \mathrm{Ext}_R^i(M, \Gamma_{I,J}(N))$ với mọi $i \geq 0$. Vì N là một R -môđun Lasker yếu nên $H_{I,J}^i(M, \Gamma_{I,J}(N))$ là Lasker yếu với mọi $i \geq 0$. Suy ra $\mathrm{Im} f, \mathrm{Im} h$ là Lasker yếu. Vì vậy, việc chứng minh sẽ hoàn thành bằng cách chứng minh rằng

$\mathrm{Hom}_R(R/\mathfrak{a}, H_{I,J}^t(M, \overline{N}))$ là Laker yếu. Vì $\overline{N}$ is (I, J) -xoắn-tự do nên $\overline{N}$ cũng là $\mathfrak{a}$ -xoắn-tự do. Khi đó có một phần tử $\overline{N}$ -chính quy $x \in \mathfrak{a}$. Từ đây, dãy khớp ngắn

$$0 \rightarrow \overline{N} \xrightarrow{x} \overline{N} \rightarrow \overline{N}/x\overline{N} \rightarrow 0$$

cảm sinh ra dãy khớp dài sau

$$\cdots H_{I,J}^{t-1}(M, \overline{N}) \xrightarrow{\alpha} H_{I,J}^{t-1}(M, \overline{N}/x\overline{N}) \xrightarrow{\beta} H_{I,J}^t(M, \overline{N}) \xrightarrow{x} H_{I,J}^t(M, \overline{N}) \cdots .$$

Theo giả thiết $H_{I,J}^i(M, \overline{N})$ là Lasker yếu với mọi $i < t$, vì vậy $H_{I,J}^i(M, \overline{N}/x\overline{N})$ với mọi $i < t - 1$. Từ giả thiết quy nạp ta suy ra rằng $\text{Hom}_R(R/\mathfrak{a}, H_{I,J}^{t-1}(M, \overline{N}/x\overline{N}))$ là Lasker yếu. Dãy khớp dài cảm sinh dãy khớp sau

$$0 \rightarrow \text{Hom}_R(R/\mathfrak{a}, \text{Im}\alpha) \rightarrow \text{Hom}_R(R/\mathfrak{a}, H_{I,J}^{t-1}(M, \overline{N}/x\overline{N})) \rightarrow \\ \rightarrow \text{Hom}_R(R/\mathfrak{a}, \text{Im}\beta) \rightarrow \text{Ext}_R^1(R/\mathfrak{a}, \text{Im}\alpha) \cdots$$

Vì $\text{Im}\alpha$ là Lasker yếu nên $\text{Hom}_R(R/\mathfrak{a}, \text{Im}\beta)$ cũng là Lasker yếu. Bằng cách áp dụng hàm tử $\text{Hom}_R(R/\mathfrak{a}, -)$ cho dãy khớp sau

$$0 \rightarrow \text{Im}\beta \rightarrow H_{I,J}^t(M, \overline{N}) \xrightarrow{x} H_{I,J}^t(M, \overline{N})$$

ta được $\text{Hom}_R(R/\mathfrak{a}, \text{Im}\beta) \cong \text{Hom}_R(R/\mathfrak{a}, H_{I,J}^t(M, \overline{N}))$ và việc chứng minh được kết thúc. $\square$

Trong [35, 2.4], nếu M, N là các R -môđun hữu hạn sinh sao cho $\text{Supp}_R(H_I^i(M, N))$ là hữu hạn với mọi $i < t$, khi đó $\text{Ass}_R(H_I^t(M, N))$ là hữu hạn. Bây giờ, ta sẽ mở rộng tính chất này trong trường hợp N là Lasker yếu và $H_{I,J}^i(M, N)$ có giá hữu hạn với mọi $i < t$.

Định lý 5.2.2. *Cho M là R -môđun hữu hạn sinh và N là R -môđun tùy ý. Cho t là một số nguyên không âm sao cho $\text{Supp}_R(H_{I,J}^i(M, N))$ là hữu hạn với mọi $i < t$. Khi đó*

- (i) $\text{Supp}_R(H_{\mathfrak{a}}^i(M, N))$ là hữu hạn với mọi $i < t$ và $\mathfrak{a} \in \tilde{W}(I, J)$.
- (ii) Nếu N là Lasker yếu thì $\text{Ass}_R(H_{\mathfrak{a}}^t(M, N))$ là hữu hạn với mọi $\mathfrak{a} \in \tilde{W}(I, J)$. Đặc biệt, $\text{Ass}_R(H_I^t(M, N))$ là tập hữu hạn.

Chứng minh. (i) Cho $F = \Gamma_{\mathfrak{a}}(-)$ và $G = \Gamma_{I,J}(M, -)$ là các hàm tử từ phạm trù các R -môđun vào chính nó. Do đó, ta có

$$FG(N) = \Gamma_{\mathfrak{a}}(\Gamma_{I,J}(M, N)) = \Gamma_{\mathfrak{a}}(\Gamma_{I,J}(\text{Hom}_R(M, N))) \\ = \Gamma_{\mathfrak{a}}(\text{Hom}_R(M, N)) = \Gamma_{\mathfrak{a}}(M, N).$$

Nếu E là một R -môđun nội xạ, khi đó $\Gamma_{I,J}(E)$ cũng là R -môđun nội xạ. Do đó

$$R^i F(G(E)) = R^i \Gamma_{\mathfrak{a}}(\Gamma_{I,J}(M, E)) \cong R^i \Gamma_{\mathfrak{a}}(\text{Hom}_R(M, \Gamma_{I,J}(E))) = 0$$

với mọi $i > 0$. Theo [52, 10.47] tồn tại một dãy phổ Grothendieck

$$E_2^{p,q} = H_{\mathfrak{a}}^p(H_{I,J}^q(M, N)) \Rightarrow_p H_{\mathfrak{a}}^{p+q}(M, N).$$

Từ giả thiết ta suy ra rằng $\text{Supp}_R(E_2^{p,q})$ là hữu hạn với mọi $q < t, p \geq 0$. Điều này dẫn đến $\text{Supp}_R(E_{\infty}^{p,q})$ là hữu hạn với mọi $q < t, p \geq 0$, vì $E_{\infty}^{p,q}$ là một thương con của $E_2^{p,q}$. Cho $n < t$, có một lọc Φ các môđun con của $H^n = H_{\mathfrak{a}}^n(M, N)$

$$0 = \Phi^{n+1}H^n \subseteq \Phi^n H^n \subseteq \dots \subseteq \Phi^1 H^n \subseteq \Phi^0 H^n = H_{\mathfrak{a}}^n(M, N)$$

sao cho

$$E_{\infty}^{i,n-i} \cong \Phi^i H^n / \Phi^{i+1} H^n$$

với mọi $i \leq n$. Bằng cách quy nạp giảm dần theo i , ta kết luận rằng $\text{Supp}_R(\Phi^i H^n)$ là hữu hạn với mọi $i \leq n$. Đặc biệt, $\text{Supp}_R(H_{\mathfrak{a}}^n(M, N))$ là hữu hạn.

(ii) Ta xét đồng cấu của dãy phổ

$$0 = E_{t+2}^{-t-2, 2t+1} \xrightarrow{d_{t+2}^{-t-2, 2t+1}} E_{t+2}^{0,t} \xrightarrow{d_{t+2}^{0,t}} E_{t+2}^{t+2, -1} = 0.$$

Suy ra $E_{t+2}^{0,t} = E_{t+3}^{0,t} = \dots = E_{\infty}^{0,t}$. Khi đó sẽ tồn tại một lọc Φ các môđun con của $H^t = H_{\mathfrak{a}}^t(M, N)$

$$0 = \Phi^{t+1}H^t \subseteq \Phi^t H^t \subseteq \dots \subseteq \Phi^1 H^t \subseteq \Phi^0 H^t = H_{\mathfrak{a}}^t(M, N)$$

sao cho

$$E_{\infty}^{i,t-i} \cong \Phi^i H^t / \Phi^{i+1} H^t$$

với mọi $i \leq t$. Bằng cách quy nạp giảm dần theo i , ta kết luận $\text{Supp}_R(\Phi^i H^t)$ là hữu hạn với mọi $0 < i \leq t$. Dãy khớp ngắn

$$0 \rightarrow \Phi^1 H^t \rightarrow \Phi^0 H^t \rightarrow E_{\infty}^{0,t} \rightarrow 0$$

suy ra

$$\text{Ass}_R(H_{\mathfrak{a}}^t(M, N)) \subseteq \text{Ass}_R(\Phi^1 H^t) \cup \text{Ass}_R(E_{\infty}^{0,t}) = \text{Ass}_R(\Phi^1 H^t) \cup \text{Ass}_R(E_{t+2}^{0,t}).$$

Vì vậy, ta chứng minh rằng $\text{Ass}_R(E_{t+2}^{0,t})$ là hữu hạn. Bây giờ, ta sẽ chứng minh rằng $\text{Ass}_R(E_r^{0,t})$ là hữu hạn bằng cách quy nạp theo r , với $2 \leq r \leq t+2$.

Khi $r = 2$, Ta có kết quả

$$\begin{aligned}\text{Ass}_R(E_2^{0,t}) &= \text{Ass}_R(\Gamma_{\mathfrak{a}}(H_{I,J}^t(M, N))) \\ &= \text{Ass}_R(\text{Hom}_R(R/\mathfrak{a}, \Gamma_{\mathfrak{a}}(H_{I,J}^t(M, N)))) \\ &= \text{Ass}_R(\text{Hom}_R(R/\mathfrak{a}, H_{I,J}^t(M, N))).\end{aligned}$$

Từ giả thiết ta suy ra rằng $H_{I,J}^i(M, N)$ là Lasker yếu với mọi $i < t$. Do đó, $\text{Hom}_R(R/\mathfrak{a}, H_{I,J}^t(M, N))$ là Lasker yếu với mọi $\mathfrak{a} \in \tilde{W}(I, J)$ theo Mệnh đề 5.2.1. Đặc biệt, $\text{Ass}_R(\text{Hom}_R(R/\mathfrak{a}, H_{I,J}^t(M, N)))$ là hữu hạn. Giả sử rằng $\text{Ass}_R(E_r^{0,t})$ là hữu hạn, ta sẽ chứng minh $\text{Ass}_R(E_{r+1}^{0,t})$ là hữu hạn. Chúng ta sẽ xem xét đồng cấu của dãy phổ sau

$$0 = E_r^{-r,t+r-1} \xrightarrow{d_r^{-r,t+r-1}} E_r^{0,t} \xrightarrow{d_r^{0,t}} E_r^{r,t-r+1}.$$

Vì $E_{r+1}^{0,t} = \text{Ker} d_r^{0,t} \subseteq E_r^{0,t}$, theo giả thiết quy nạp ta suy ra rằng $\text{Ass}_R(E_{r+1}^{0,t})$ là hữu hạn. Do đó, $\text{Ass}_R(E_{t+2}^{0,t})$ là hữu hạn và việc chứng minh đã kết thúc. $\square$

Hệ quả 5.2.3. *Cho M, N là hai R -môđun hữu hạn sinh và t là một số nguyên không âm. Giả sử rằng $H_{I,J}^i(M, N)$ là artin với mọi $i < t$. Khi đó $\text{Ass}_R(H_{\mathfrak{a}}^t(M, N))$ là hữu hạn với mọi $\mathfrak{a} \in \tilde{W}(I, J)$. Đặc biệt, $\text{Ass}_R(H_I^t(M, N))$ là tập hữu hạn.*

Định lý sau sẽ cho chúng ta biết câu hỏi: Khi nào thì tập hợp $\text{Ass}_R(H_{I,J}^t(M, N))$ là hữu hạn?

Định lý 5.2.4. *Cho M là R -môđun hữu hạn sinh, N là R -môđun tùy ý và t là một số nguyên không âm thỏa mãn điều kiện*

- (i) $\text{Ass}_R(H_{I,J}^t(N))$ là một tập hợp hữu hạn;
- (ii) $\text{Ext}_R^{t-i}(M, H_{I,J}^i(N))$ là Lasker yếu với mọi $i < t$.

Khi đó $\text{Ass}_R(H_{I,J}^t(M, N))$ là hữu hạn.

Chứng minh. Cho $F = \text{Hom}_R(M, -)$ và $G = \Gamma_{I,J}(-)$ là các hàm tử từ tập các R -môđun vào chính nó. Rõ ràng ta có $FG(N) = \Gamma_{I,J}(M, N)$ với mọi R -môđun N . Hơn nữa, nếu E là một R -môđun nội xạ, khi đó $G(E) = \Gamma_{I,J}(E)$ cũng là nội

xạ. Do đó $G(E)$ là F -không tuần hoàn phải. Theo [52, 10.47], tồn tại dãy phổ Grothendieck

$$E_2^{p,q} = \text{Ext}_R^p(M, H_{I,J}^q(N)) \Rightarrow_p H_{I,J}^{p+q}(M, N).$$

Khi đó có một lọc Φ của các môđun con của $H^t = H_{I,J}^t(M, N)$

$$0 = \Phi^{t+1}H^t \subseteq \Phi^t H^t \subseteq \dots \subseteq \Phi^0 H^t = H^t$$

sao cho

$$E_\infty^{i,t-i} \cong \Phi^i H^t / \Phi^{i+1} H^t$$

với mọi $i \leq t$. Theo giả thiết $E_2^{i,t-i}$ là Lasker yếu với mọi $0 < i \leq t$. Khi đó $E_\infty^{i,t-i}$ là Lasker yếu với mọi $0 < i \leq t$, vì $E_\infty^{i,t-i}$ là thương con của $E_2^{i,t-i}$. Suy ra rằng $\Phi^t H^t, \Phi^{t-1} H^t, \dots, \Phi^1 H^t$ là Lasker yếu. Dãy khớp ngắn sau

$$0 \rightarrow \Phi^1 H^t \rightarrow H^t \rightarrow E_\infty^{0,t} \rightarrow 0$$

cho ta kết quả

$$\text{Ass}_R(H_{I,J}^t(M, N)) \subseteq \text{Ass}_R(\Phi^1 H^t) \cup \text{Ass}_R(E_\infty^{0,t}).$$

Lưu ý rằng $E_\infty^{0,t}$ là một môđun con của $E_2^{0,t} = \text{Hom}_R(M, H_{I,J}^t(N))$. Theo giả thiết, $\text{Ass}_R(\text{Hom}_R(M, H_{I,J}^t(N))) = \text{Supp}_R(M) \cap \text{Ass}_R(H_{I,J}^t(N))$ là hữu hạn. Vì vậy $\text{Ass}_R(E_\infty^{0,t})$ là hữu hạn và việc chứng minh đã kết thúc. $\square$

Hệ quả 5.2.5. *Cho M là R -môđun hữu hạn sinh, N là R -môđun tùy ý và t là số nguyên không âm. Giả sử rằng $H_{I,J}^i(N)$ là Lasker yếu với mọi $i < t$ và $H_{I,J}^t(N)$ có hữu hạn các idêan nguyên tố liên kết. Khi đó $\text{Ass}_R(H_{I,J}^t(M, N))$ là hữu hạn.*

Bây giờ ta sẽ xem xét mối liên hệ tính hữu hạn của giá của $\text{Ext}_R^i(M, N)$ và giá của $H_{I,J}^i(M, N)$.

Định lý 5.2.6. *Cho M là R -môđun hữu hạn sinh, N là một R -môđun tùy ý và t là một số nguyên không âm sao cho $\text{Supp}_R(\text{Ext}_R^i(M, N))$ là hữu hạn với mọi $i < t$. Khi đó:*

- (i) $\text{Supp}_R(H_{I,J}^i(M, N))$ là hữu hạn với mọi $i < t$.
- (ii) Nếu $\text{Ass}_R(\text{Ext}_R^t(M, N)) \cap W(I, J)$ là hữu hạn thì $\text{Ass}_R(H_{I,J}^t(M, N))$ là hữu hạn.

Chứng minh. Cho $F = \Gamma_{I,J}(-)$ và $G = \text{Hom}_R(M, -)$ là các hàm tử từ tập các R -môđun vào chính nó. Ta có $FG = \Gamma_{I,J}(\text{Hom}_R(M, -)) = \Gamma_{I,J}(M, -)$. Nếu E là R -môđun nội xạ thì $\Gamma_{I,J}(E)$ cũng R -môđun nội xạ. Cho $\mathbf{F}_\bullet$ là một phép giải tự do của M

$$\mathbf{F}_\bullet : \cdots \rightarrow F_2 \rightarrow F_1 \rightarrow F_0 \rightarrow M \rightarrow 0.$$

Bằng cách áp dụng hàm tử $\text{Hom}_R(-, \Gamma_{I,J}(E))$ cho dãy khớp trên, ta nhận được dãy khớp

$$0 \rightarrow \text{Hom}_R(M, \Gamma_{I,J}(E)) \rightarrow \text{Hom}_R(F_0, \Gamma_{I,J}(E)) \rightarrow \text{Hom}_R(F_1, \Gamma_{I,J}(E)) \rightarrow \cdots$$

Vì M là hữu hạn sinh, khi đó dãy khớp có thể được viết lại

$$0 \rightarrow \Gamma_{I,J}(\text{Hom}_R(M, E)) \rightarrow \Gamma_{I,J}(\text{Hom}_R(F_0, E)) \rightarrow \Gamma_{I,J}(\text{Hom}_R(F_1, E)) \rightarrow \cdots$$

Lưu ý rằng $\text{Hom}_R(\mathbf{F}_\bullet, E)$ là một phép giải nội xạ của $\text{Hom}_R(M, E)$. Khi đó $R^i F(G(E)) = H_{I,J}^i(\text{Hom}_R(M, E)) = 0$ với mọi $i > 0$. Áp dụng [52, 10.47], tồn tại một dãy phổ Grothendieck

$$E_2^{p,q} = H_{I,J}^p(\text{Ext}_R^q(M, N)) \xRightarrow{p} H_{I,J}^{p+q}(M, N).$$

(i) Cho $n < t$, tồn tại một cái lọc Φ các môđun con của $H^n = H_{I,J}^n(M, N)$

$$0 = \Phi^{n+1}H^n \subseteq \Phi^n H^n \subseteq \cdots \subseteq \Phi^1 H^n \subseteq \Phi^0 H^n = H^n$$

sao cho

$$E_\infty^{i,n-i} \cong \Phi^i H^n / \Phi^{i+1} H^n$$

với mọi $i \leq n$. Theo giả thiết $\text{Supp}_R(E_2^{p,q})$ là hữu hạn với mọi $p \geq 0, q < t$. Vì $E_\infty^{p,q}$ là thương con của $E_2^{p,q}$ nên ta có $\text{Supp}_R(E_\infty^{p,q})$ là hữu hạn với mọi $p \geq 0, q < t$. Tương tự, $\text{Supp}_R(\Phi^i H^n)$ là hữu hạn với mọi $0 \leq i \leq n$. Đặc biệt, $\text{Supp}_R(H_{I,J}^n(M, N))$ là hữu hạn.

(ii) Theo cách giải thích tương tự, ta có $\text{Supp}_R(\Phi^i H^t)$ là hữu hạn với mọi $0 < i \leq t$. Từ dãy khớp ngắn $0 \rightarrow \Phi^1 H^t \rightarrow H_{I,J}^t(M, N) \rightarrow E_\infty^{0,t} \rightarrow 0$ ta có được kết quả

$$\text{Ass}_R(H_{I,J}^t(M, N)) \subseteq \text{Ass}_R(\Phi^1 H^t) \cup \text{Ass}_R(E_\infty^{0,t}).$$

Lưu ý rằng $E_\infty^{0,t}$ là môđun con của $E_2^{0,t} = \Gamma_{I,J}(\text{Ext}_R^t(M, N))$. Theo [58, 1.10], ta có $\text{Ass}_R(E_2^{0,t}) = \text{Ass}_R(\text{Ext}_R^t(M, N)) \cap W(I, J)$ là hữu hạn. Từ những chứng minh trên ta suy ra rằng $\text{Ass}_R(E_\infty^{0,t})$ là hữu hạn và điều này đã kết thúc việc chứng minh. $\square$

5.3 Tập idêan nguyên tố gắn kết của đối đồng điều địa phương suy rộng bậc lớn nhất theo một cặp idêan

Mục này chúng tôi đã hiện thực hóa lại kết quả đạt được trong [47]. Trong trường hợp $(R, \mathfrak{m})$ là vành địa phương, chúng ta được chứng minh bởi [40, 3.1] là $H_{I,J}^{p+d}(M, N)$ là Artin, với $p = \text{pd}M < \infty$ và $d = \dim N < \infty$. Do đó, môđun $H_{I,J}^{p+d}(M, N)$ có một biểu diễn thứ cấp. Bây giờ ta sẽ trình bày về tập $\text{Att}_R(H_{I,J}^{p+d}(M, N))$ thông qua định lý dưới đây

Định lý 5.3.1. *Cho $(R, \mathfrak{m})$ là vành địa phương và M, N là các R -môđun hữu hạn sinh với $p = \text{pd}M < \infty$ và $d = \dim N < \infty$. Khi đó $\text{Att}_R(H_{I,J}^{p+d}(M, N)) = \text{Att}_R(H_I^{p+d}(M, N/JN))$ và*

$$\text{Att}_R(H_{I,J}^{p+d}(M, N)) = \{\mathfrak{p} \in \text{Ass}_R(N/JN) \mid \text{cd}(I, M, R/\mathfrak{p}) = p + d\}.$$

Để chứng minh Định lý 5.3.1 chúng ta cần chứng minh các kết quả sau:

Bổ đề 5.3.2. *Cho M, N là các R -môđun hữu hạn sinh và t là một số nguyên không âm. Nếu $H_{I,J}^t(M, R/\mathfrak{p}) = 0$ với mọi $\mathfrak{p} \in \text{Supp}_R(N)$ thì $H_{I,J}^t(M, N) = 0$.*

Chứng minh. Vì N là R -môđun hữu hạn sinh, nên tồn tại dãy các môđun con của N

$$0 = N_0 \subseteq N_1 \subseteq N_2 \subseteq \dots \subseteq N_k = N$$

sao cho $N_i/N_{i-1} \cong R/\mathfrak{p}_i$ với một số $\mathfrak{p}_i \in \text{Supp}_R(N)$. Dãy khớp ngắn

$$0 \rightarrow N_{i-1} \rightarrow N_i \rightarrow R/\mathfrak{p}_i \rightarrow 0$$

cho dãy khớp $H_{I,J}^t(M, N_i) \cong H_{I,J}^t(M, N_{i-1})$ với $1 \leq i \leq k$ theo giả thiết. Do đó $H_{I,J}^t(M, N) \cong H_{I,J}^t(M, N_0) = 0$. $\square$

Từ đây chúng ta có một hệ quả của Bổ đề 5.3.2.

Hệ quả 5.3.3. *Cho M, N là các R -môđun hữu hạn sinh và t là một số nguyên không âm. Giả sử rằng $H_{I,J}^t(M, R/\mathfrak{p}) = 0$ với mọi $\mathfrak{p} \in \text{Supp}_R(N)$ và L là một R -môđun hữu hạn sinh sao cho $\text{Supp}_R(L) \subseteq \text{Supp}_R(N)$. Khi đó $H_{I,J}^t(M, L) = 0$.*

Bổ đề 5.3.4. Cho M, N là các môđun hữu hạn sinh. Giả sử $\text{Ext}_R^i(M, H_{I,J}^j(N)) = 0$ với mọi $i > p$ hoặc $j > r$. Khi đó

$$H_{I,J}^{p+r}(M, N) \cong \text{Ext}_R^p(M, H_{I,J}^r(N)).$$

Chứng minh. Cho $G(-) := \Gamma_{I,J}(-)$ và $F(-) := \text{Hom}_R(M, -)$ là các hàm tử từ phạm trù các R -môđun vào chính nó. Khi đó $FG(-) = \Gamma_{I,J}(M, -)$ và F là hàm tử khớp trái. Nếu E là một R -môđun nội xạ thì

$$R^i F(G(E)) = R^i \text{Hom}_R(M, \Gamma_{I,J}(E)) = 0$$

với mọi $i > 0$, vì $\Gamma_{I,J}(E)$ là một R -môđun nội xạ. Áp dụng [52, 10.47] tồn tại một dãy phổ Grothendieck

$$E_2^{i,j} = \text{Ext}_R^i(M, H_{I,J}^j(N)) \xRightarrow{i} H_{I,J}^{i+j}(M, N).$$

Ta xét các đồng cấu của dãy phổ

$$E_k^{p-k, r+k-1} \rightarrow E_k^{p, r} \rightarrow E_k^{p+k, r+1-k}.$$

Theo giả thiết, ta có $E_2^{i,j} = 0$ với mọi $i > p$ or $j > r$. Khi đó $E_k^{p-k, r+k-1} = E_k^{p+k, r+1-k} = 0$ với mọi $k \geq 2$, vì vậy

$$E_2^{p, r} = E_3^{p, r} = \dots = E_\infty^{p, r}.$$

Việc chứng minh sẽ kết thúc bằng cách chứng minh rằng $E_\infty^{p, r} \cong H_{I,J}^{p+r}(M, N)$.

Thật vậy, tồn tại một cái lọc Φ của $H^{p+r} = H_{I,J}^{p+r}(M, N)$ sao cho

$$0 = \Phi^{p+r+1} H^{p+r} \subseteq \Phi^{p+r} H^{p+r} \subseteq \dots \subseteq \Phi^1 H^{p+r} \subseteq \Phi^0 H^{p+r} = H_{I,J}^{p+r}(M, N)$$

và

$$E_\infty^{i, p+r-i} \cong \Phi^i H^{p+r} / \Phi^{i+1} H^{p+r}, \quad 0 \leq i \leq p+r.$$

Theo giả thiết trên, ta có $E_2^{i, p+r-i} = \text{Ext}_R^i(M, H_{I,J}^{p+r-i}(N)) = 0$ với mọi $i \neq p$. Do đó

$$\Phi^{p+1} H^{p+r} = \Phi^{p+2} H^{p+r} = \dots = \Phi^{p+r+1} H^{p+r} = 0$$

và

$$\Phi^p H^{p+r} = \Phi^{p-1} H^{p+r} = \dots = \Phi^0 H^{p+r} = H_{I,J}^{p+r}(M, N).$$

Dẫn đến kết quả

$$E_{\infty}^{p,r} \cong \Phi^p H^{p+r} / \Phi^{p+1} H^{p+r} \cong H_{I,J}^{p+r}(M, N).$$

Việc chứng minh được hoàn thành. $\square$

Theo [14, 2.1], nếu $(R, \mathfrak{m})$ là một vành địa phương và N là hữu hạn sinh với $d = \dim N$ thì $H_{I,J}^d(N)$ là Artin. Một kết quả khác, $H_{I,J}^i(N) = 0$ với mọi $i > \dim N$ ([58, 4.7 (1)]). Do đó, kết quả sau đây như là một hệ quả của Bổ đề 5.3.4.

Hệ quả 5.3.5. ([40, 3.1]) *Cho M, N là các môđun hữu hạn sinh trên vành địa phương $(R, \mathfrak{m})$. Giả sử rằng $p = \text{pd} M < \infty$ và $d = \dim N < \infty$. Khi đó $H_{I,J}^{p+d}(M, N) \cong \text{Ext}_R^p(M, H_{I,J}^d(N))$. Hơn nữa $H_{I,J}^{p+d}(M, N)$ là Artin.*

Cận trên đúng của tất cả các số nguyên i thỏa mãn $H_{I,J}^i(M, N) \neq 0$, được ký hiệu bởi $\text{cd}(I, J, M, N)$, được gọi là chiều đối đồng điều của M, N tương ứng theo cặp idêan (I, J)

$$\text{cd}(I, J, M, N) = \sup\{i \mid H_{I,J}^i(M, N) \neq 0\}.$$

Nếu N là hữu hạn sinh, một sự kết hợp giữa Bổ đề 5.3.4 với [58, 4.7] ta kết luận rằng

$$\text{cd}(I, J, M, N) \leq \min\{\text{pd} M + \dim N, \text{pd} M + \dim N/JN + 1\}.$$

Chúng ta cũng sẽ gọi chiều đối đồng điều của N tương ứng theo một cặp idêan (I, J) và được định nghĩa như trong ([14])

$$\text{cd}(I, J, N) = \sup\{i \mid H_{I,J}^i(N) \neq 0\}.$$

Bổ đề 5.3.6. *Cho M, N, L là các R -môđun hữu hạn sinh sao cho $\text{pd} M < \infty$ và $\text{Supp}_R(L) \subseteq \text{Supp}_R(N)$. Khi đó $\text{cd}(I, J, M, L) \leq \text{cd}(I, J, M, N)$. Hơn nữa $\text{cd}(I, J, M, N) = \text{cd}(I, J, M, L)$ nếu $\text{Supp}_R(N) = \text{Supp}_R(L)$.*

Chứng minh. Việc chứng minh bổ đề này hoàn toàn tương tự như đã được chứng minh trong [5, Định lý B]. $\square$

Bây giờ chúng ta bắt đầu chứng minh Định lý 5.3.1.

Chúng minh Định lý 5.3.1. Ghi nhớ rằng $H_{I,J}^i(M, N) = 0$ với mọi $i > p + d$. Nếu $H_{I,J}^{p+d}(M, N) = 0$, thì $\text{cd}(I, J, M, N) < p + d$ và $\text{Att}_R(H_{I,J}^{p+d}(M, N)) = \emptyset$. Cho $\mathfrak{p} \in \text{Ass}_R(N/JN)$, khi đó $R/\mathfrak{p}$ là J -xoắn. Theo kết quả của [40, 2.7] ta có $H_{I,J}^i(M, R/\mathfrak{p}) \cong H_I^i(M, R/\mathfrak{p})$ với mọi $i \geq 0$. Vì $\mathfrak{p} \in \text{Supp}_R(N)$, ta có $\text{cd}(I, J, M, R/\mathfrak{p}) \leq \text{cd}(I, J, M, N) < p + d$ theo Hệ quả 5.3.3 và Bổ đề 5.3.6. Do đó $H_I^{p+d}(M, R/\mathfrak{p}) = 0$ và khi đó

$$\{\mathfrak{p} \in \text{Ass}_R(N/JN) \mid \text{cd}(I, M, R/\mathfrak{p}) = p + d\} = \emptyset.$$

Chúng ta giả sử rằng $H_{I,J}^{p+d}(M, N) \neq 0$. Theo Bổ đề 5.3.4, ta được kết quả

$$\text{Att}_R(H_{I,J}^{p+d}(M, N)) = \text{Att}_R(\text{Ext}_R^p(M, H_{I,J}^d(N))).$$

Vì $\text{Ext}_R^p(M, -)$ là hàm tử khớp trái hiệp biến, nên có các đẳng cấu

$$\text{Ext}_R^p(M, H_{I,J}^d(N)) \cong \text{Ext}_R^p(M, R) \otimes_R H_{I,J}^d(N).$$

Theo kết quả từ Bổ đề 1.2.4(ii) ta có

$$\text{Att}_R(H_{I,J}^{p+d}(M, N)) = \text{Att}_R(H_{I,J}^d(N)) \cap \text{Supp}_R \text{Ext}_R^p(M, R).$$

Áp dụng [15, 2.1], ta được

$$\text{Att}_R(H_{I,J}^d(N)) = \text{Att}_R(H_I^d(N/JN)).$$

Từ đây cho ta kết quả

$$\begin{aligned} \text{Att}_R(H_{I,J}^{p+d}(M, N)) &= \text{Att}_R(H_I^d(N/JN)) \cap \text{Supp}_R \text{Ext}_R^p(M, R) \\ &= \text{Att}_R(\text{Ext}_R^p(M, R) \otimes_R H_I^d(N/JN)) \\ &= \text{Att}_R(\text{Ext}_R^p(M, H_I^d(N/JN))) \\ &= \text{Att}_R(H_I^{p+d}(M, N/JN)). \end{aligned}$$

Chúng ta cũng biết theo [24, 2.3] ta có

$$\text{Att}_R(H_I^{p+d}(M, N/JN)) = \{\mathfrak{p} \in \text{Ass}_R(N/JN) \mid \text{cd}(I, M, R/\mathfrak{p}) = p + d\}.$$

Do đó, chúng ta kết luận rằng

$$\text{Att}_R(H_{I,J}^{p+d}(M, N)) = \{\mathfrak{p} \in \text{Ass}_R(N/JN) \mid \text{cd}(I, M, R/\mathfrak{p}) = p + d\},$$

và việc chứng minh được hoàn thành. $\square$

Mệnh đề 5.3.7. Cho $(R, \mathfrak{m})$ là vành địa phương và M, N là các R -môđun hữu hạn sinh với $\text{pd}M = p < \infty$ và $\dim N = d < \infty$. Giả sử rằng $I + J$ là $\mathfrak{m}$ -nguyên sơ và $\dim N = d > 0$. Khi đó $H_{I,J}^{p+d}(M, N) = 0$ hoặc $H_{I,J}^{p+d}(M, N)$ không là môđun hữu hạn sinh.

Chứng minh. Theo cách chứng minh của [40, 3.4] ta có $H_{I,J}^i(M, N) \cong H_{\mathfrak{m},J}^i(M, N)$ với mọi $i \geq 0$. Hơn nữa

$$\begin{aligned} \text{Att}_R(H_{\mathfrak{m},J}^{p+d}(M, N)) &\subseteq \text{Att}_R(H_{\mathfrak{m},J}^d(N)) \\ &\subseteq \text{Att}_R(H_{\mathfrak{m}}^d(N)) \text{ (theo [15, 2.1])} \\ &= \{\mathfrak{p} \in \text{Ass}_R(N) \mid \dim R/\mathfrak{p} = d\}. \end{aligned}$$

Vì $\dim N = d > 0$, ta có $\text{Att}_R(H_{\mathfrak{m},J}^{p+d}(M, N)) \not\subseteq \{\mathfrak{m}\}$.

Nếu $H_{\mathfrak{m},J}^{p+d}(M, N) \neq 0$ và do đó nó hữu hạn sinh thì chiều dài của nó là hữu hạn. Do đó $\text{Att}_R(H_{\mathfrak{m},J}^{p+d}(M, N)) = \{\mathfrak{m}\}$, điều này là hoàn toàn mâu thuẫn. $\square$

Mệnh đề 5.3.8. Cho $(R, \mathfrak{m})$ là vành địa phương và M, N là các R -môđun hữu hạn sinh với $\text{pd}M = p < \infty, \dim N = d < \infty$. Cho I_1, I_2 là các idêan phân biệt của R sao cho $I_1 \subseteq I_2$. Khi đó $\text{Att}_R(H_{I_1,J}^{p+d}(M, N)) \subseteq \text{Att}_R(H_{I_2,J}^{p+d}(M, N))$.

Chứng minh. Từ [15, 2.5], sẽ có một đồng cấu toàn ánh

$$H_{I_2,J}^d(N) \rightarrow H_{I_1,J}^d(N).$$

Bằng cách áp dụng hàm tử khớp phải $\text{Ext}_R^p(M, -)$ cho đồng cấu trên, ta có một dãy khớp

$$\text{Ext}_R^p(M, H_{I_2,J}^d(N)) \rightarrow \text{Ext}_R^p(M, H_{I_1,J}^d(N)) \rightarrow 0.$$

Do đó, kết quả được khẳng định bằng cách áp dụng Hệ quả 5.3.5 và Bổ đề 1.2.4(ii). $\square$

Bổ đề 5.3.9. Cho N là R -môđun hữu hạn sinh và t là một số nguyên không âm sao cho $\text{cd}(I, J, N) \leq t$. Khi đó $H_{I,J}^t(N/\mathfrak{a}N) \cong H_{I,J}^t(N)/\mathfrak{a}H_{I,J}^t(N)$. Trường hợp đặc biệt, nếu $\mathfrak{a} \in \text{Supp}_R(N)$ thì

$$H_{I,J}^t(N/\mathfrak{a}N) \cong H_{I,J}^t(R/\mathfrak{a}) \otimes_R N.$$

Chứng minh. Cho $S = R/\text{Ann}_R(N)$, từ kết quả của [58, 2.7] ta suy ra rằng có một đẳng cấu $H_{I,J}^i(N) \cong H_{IS,JS}^i(N)$ với mọi $i \geq 0$. Vì rằng $\text{cd}(IS, JS, S) = \text{cd}(I, J, N)$, do đó $H_{IS,JS}^i(S) = 0$ với mọi $i > t$ theo giả thiết. Từ đây dẫn đến $H_{IS,JS}^i(N) = 0$ với mọi S -môđun N và $i > t$. Vì vậy $H_{IS,JS}^t(-)$ là một hàm tử khớp phải trên tập các S -môđun. Bây giờ ta có

$$\begin{aligned}
H_{I,J}^t(N/\mathfrak{a}N) &\cong H_{IS,JS}^t(N/\mathfrak{a}N) \\
&\cong H_{IS,JS}^t(S \otimes_S N/\mathfrak{a}N) \\
&\cong H_{IS,JS}^t(S) \otimes_S N/\mathfrak{a}N \\
&\cong H_{IS,JS}^t(S) \otimes_S (N \otimes_R R/\mathfrak{a}) \\
&\cong H_{IS,JS}^t(S \otimes_S N) \otimes_R R/\mathfrak{a} \\
&\cong H_{IS,JS}^t(N) \otimes_R R/\mathfrak{a} \\
&\cong H_{I,J}^t(N) \otimes_R R/\mathfrak{a} \cong H_{I,J}^t(N)/\mathfrak{a}H_{I,J}^t(N).
\end{aligned}$$

Nếu $\mathfrak{a} \in \text{Supp}_R(N)$, thì $R/\mathfrak{a}$ cũng là một S -môđun. Từ chứng minh trên, ta có

$$H_{I,J}^t(N/\mathfrak{a}N) \cong H_{IS,JS}^t(S) \otimes_S (R/\mathfrak{a} \otimes_R N) \cong H_{I,J}^t(R/\mathfrak{a}) \otimes_R N,$$

và Bổ đề đã được chứng minh. $\square$

Bây giờ ta kết hợp kết quả của [58, 4.5] với Bổ đề 5.3.9, ta có một kết quả về tính Artin của các môđun đối đồng điều địa phương suy rộng.

Định lý 5.3.10. *Cho $(R, \mathfrak{m})$ là vành địa phương và M, N là các R -môđun hữu hạn sinh. Giả sử rằng $I + J$ là $\mathfrak{m}$ -nguyên sơ và $p = \text{pd}M, t = \dim N/JN$. Khi đó $H_{I,J}^{p+t}(M, N)/JH_{I,J}^{p+t}(M, N)$ là Artin.*

Chứng minh. Từ Bổ đề 5.3.4 ta có $H_{I,J}^{p+t}(M, N) \cong \text{Ext}_R^p(M, H_{I,J}^t(N))$, bởi vì $H_{I,J}^i(N) = 0$ với mọi $i > t$. Kết hợp tính khớp phải của hàm tử $\text{Ext}_R^p(M, -)$ với Bổ đề 5.3.9, ta được

$$H_{I,J}^{p+t}(M, N)/JH_{I,J}^{p+t}(M, N) \cong \text{Ext}_R^p(M, H_{I,J}^t(N)/JH_{I,J}^t(N)).$$

Theo [14, 2.3], $H_{I,J}^t(N)/JH_{I,J}^t(N)$ là Artin và ta có được điều phải chứng minh. $\square$

Chương 6

Kết quả và bàn luận

Nội dung của Luận án quan tâm nghiên cứu các tính chất của đối đồng điều địa phương theo một cặp ideal và đối đồng điều địa phương suy rộng theo một cặp ideal nhằm nghiên cứu cụ thể một số tính chất như: Tính Artin, tính Lasker yếu, tính hữu hạn, tính minimax, và tập các ideal nguyên tố liên kết, gắn kết của chúng. Những kết quả này đã được gửi đăng ở các tạp chí trong danh mục SCI, SCIE thuộc hệ thống danh mục ISI và những tạp chí khoa học có uy tín trong nước. Kết quả của Luận án là sự cụ thể hóa một cách chi tiết nội dung của bài báo [45, 46, 47, 62] đã được tác giả công bố trong thời gian qua. Sau đây, chúng tôi đi liệt kê một cách có thứ tự những kết quả quan trọng đạt được trong Luận án như sau:

1. Theo Mệnh đề 2.1.7 ta có $H_{I,J}^i(M)$ là (I, J) -đối Lasker yếu với mọi $i \leq t$. Khi đó $\text{Ext}_R^i(R/I, M)$ là J -Lasker yếu với mọi $i \leq t$.
2. Nếu $\text{Ext}_R^n(R/I, M)$ là J -Lasker yếu thì $\text{Hom}_R(R/I, H_{I,J}^n(M))$ là J -Lasker yếu; nếu $\text{Ext}_R^{n+1}(R/I, M)$ là một R -môđun J -Lasker yếu thì $\text{Ext}_R^1(R/I, H_{I,J}^n(M))$ là J -Lasker yếu; nếu $\text{Ext}_R^{n+1}(R/I, M)$ và $\text{Ext}_R^{n+2}(R/I, M)$ là J -Lasker yếu thì $\text{Hom}_R(R/I, H_{I,J}^{n+1}(M))$ là J -Lasker yếu (Định lý 2.1.9).
3. Định lý 2.1.10 cho rằng nếu $H_{I,J}^i(M)$ là (I, J) -đối Lasker yếu thì $H_{I,J}^n(M)$ là (I, J) -đối Lasker yếu.
4. Tính hữu hạn theo Định lý 2.2.7: $\text{Ext}_R^i(R/I, M)$ là Lasker yếu. Khi đó $H_{I,J}^t(M)$ cũng là (I, J) -đối hữu hạn yếu (Định lý 2.2.8).

5. Ta có $H_{I,J}^d(M)$ là Artin. Khi đó $\text{Supp}_R(H_{I,J}^d(M))$ và $\text{Supp}_R(H_{I,J}^{d-1}(M)/JH_{I,J}^{d-1}(M))$ là hữu hạn (Định lý 3.1.1).
6. Theo Mệnh đề 3.1.3, nếu $H_{I,J}^i(R/\mathfrak{p})$ là một Artin yếu thì $H_{I,J}^i(M)$ là Artin yếu và Mệnh đề 3.1.5 cho rằng $H_{I,J}^i(M)/JH_{I,J}^i(M)$ là Artin yếu.
7. Định lý 3.1.6: $H_{I,J}^d(M)/JH_{I,J}^d(M)$ là Artin yếu. Định lý 3.1.8 chứng minh rằng: $H_{\mathfrak{a}}^i(M)$ là Artin yếu; $\text{Ext}_R^i(R/\mathfrak{a}, M)$ là Artin yếu. Mệnh đề 3.1.9: $H_{I,J}^i(M)$ là Artin yếu.
8. Định lý 3.2.1 cho ta kết quả $H_{I,J}^i(M) \cong H_{\mathfrak{m},J}^i(M) \cong H_{\mathfrak{m}}^i(M)$.
9. Kết quả về tính Artin, theo Định lý 3.2.3 là $\dim H_{I,J}^i(M) \leq k$ nếu và chỉ nếu $\dim H_{\mathfrak{a}}^i(M) \leq k$; nếu $\text{Supp}_R(H_{I,J}^i(M)) \subseteq \text{Max}(R)$ thì $H_{\mathfrak{a}}^i(M)$ là Artin; $H_{I,J}^i(M)$ là Artin nếu và chỉ nếu $H_{\mathfrak{a}}^i(M)$ là Artin.
10. Định lý 3.2.6 cho rằng $H_{I,J}^i(M, N) \cong H_{\mathfrak{m},J}^i(M, N) \cong H_{\mathfrak{m}}^i(M, N)$ và $H_{I,J}^i(M, N)$ là Artin.
11. $\text{Supp}_R(H_{I,J}^i(M, N)) \subseteq \text{Max}(R)$ nếu và chỉ nếu $\text{Supp}_R(H_{\mathfrak{a}}^i(M, N)) \subseteq \text{Max}(R)$ và $H_{I,J}^i(M, N)$ là Artin nếu và chỉ nếu $H_{\mathfrak{a}}^i(M, N)$ là Artin (theo Định lý 3.2.7).
12. Định lý 4.1.9, $\text{Ext}_R^i(R/\mathfrak{a}, N)$ là minimax; nếu $\text{Ext}_R^t(R/\mathfrak{a}, N)$ là minimax thì $\text{Hom}_R(R/\mathfrak{a}, H_{I,J}^t(N))$ là minimax và $\text{Hom}_R(R/\mathfrak{a}, H_{I,J}^t(M, N))$ là minimax.
13. Định lý 4.2.8, $\text{Ext}_R^i(M/IM, N)$ là minimax; $\text{Ext}_R^t(M/IM, N)$ là minimax, $\text{Hom}_R(R/I, H_I^t(M, N))$ là minimax và $\text{Hom}_R(R/I, H_I^t(M, N))$ là minimax. Định lý 4.2.11 có được là $\text{Ext}_R^i(M/IM, N)$ là minimax.
14. Định lý 5.1.1, $\text{Ext}_R^k(R/\mathfrak{a}, H_{I,J}^t(M))$ Lasker yếu và $\text{Ass}_R(\text{Hom}_R(R/\mathfrak{a}, H_{I,J}^t(M)))$ hữu hạn. $\text{Ass}_R(\text{Hom}_R(R/\mathfrak{a}, H_{I,J}^t(M)))$ là hữu hạn và nếu $H_{I,J}^i(M)$ là (I, J) -đối hữu hạn yếu thì $\text{Hom}_R(R/I, H_{I,J}^t(M))$ cũng là Lasker yếu.
15. Mệnh đề 5.1.4, $\text{Ass}_R(\text{Ext}_R^2(R/\mathfrak{a}, H_{I,J}^t(M)))$ và $\text{Ass}_R(\text{Hom}_R(R/\mathfrak{a}, H_{I,J}^{t+1}(M)))$ là hữu hạn.

16. Định lý 5.1.6, $\text{Hom}_R(R/I, H_{I,J}^t(M))$ Lasker yếu và $\text{Ass}_R(\text{Hom}_R(R/I, H_{I,J}^t(M)))$ hữu hạn.
17. Mệnh đề 5.2.1 và Định lý 5.2.2 khẳng định $\text{Hom}_R(R/\mathfrak{a}, H_{I,J}^t(M, N))$ Lasker yếu; $\text{Supp}_R(H_{\mathfrak{a}}^i(M, N))$ hữu hạn; $\text{Ass}_R(H_{\mathfrak{a}}^t(M, N))$ và $\text{Ass}_R(H_I^t(M, N))$ là một tập hợp hữu hạn.
18. $\text{Ass}_R(H_{I,J}^t(M, N))$ và $\text{Supp}_R(H_{I,J}^i(M, N))$ hữu hạn; nếu $\text{Ass}_R(\text{Ext}_R^t(M, N)) \cap W(I, J)$ là hữu hạn thì $\text{Ass}_R(H_{I,J}^t(M, N))$ là hữu hạn (Định lý 5.2.4 và Định lý 5.2.6).
19. Theo Định lý 5.3.1, $\text{Att}_R(H_{I,J}^{p+d}(M, N)) = \text{Att}_R(H_I^{p+d}(M, N/JN))$ và $\text{Att}_R(H_{I,J}^{p+d}(M, N)) = \{\mathfrak{p} \in \text{Ass}_R(N/JN) \mid \text{cd}(I, M, R/\mathfrak{p}) = p + d\}$.
20. Mệnh đề 5.3.7, $H_{I,J}^{p+d}(M, N) = 0$ hoặc $H_{I,J}^{p+d}(M, N)$ không là môđun hữu hạn sinh. Mệnh đề 5.3.8, $\text{Att}_R(H_{I_1,J}^{p+d}(M, N)) \subseteq \text{Att}_R(H_{I_2,J}^{p+d}(M, N))$. Từ đây, Mệnh đề 5.3.10, $H_{I,J}^{p+t}(M, N)/JH_{I,J}^{p+t}(M, N)$ là Artin.

Những kết quả trình bày trong luận án là những thành quả ban đầu trong quá trình nghiên cứu các môđun $H_{I,J}^i(M)$, $H_{I,J}^i(M, N)$. Trong thời gian tới, chúng tôi sẽ tiếp tục nghiên cứu các vấn đề sau đây:

- Các tính chất của môđun $H_{I,J}^i(M, N)$ liên quan đến môđun co-minimax.
- Chúng tôi sẽ tiếp tục nghiên cứu về các môđun I -fine, I -cofine môđun và các môđun đối đồng điều địa phương.
- Tìm các mối liên hệ giữa tập idêan nguyên tố liên kết và tập các idêan nguyên tố gắn kết của môđun $H_{I,J}^i(M, N)$.

Danh mục các công trình của tác giả

1. Tran Tuan Nam, Nguyen Minh Tri, Nguyen Thanh Nam and Nguyen Duc Minh (2019), "On the finiteness of associated primes of local cohomology modules", *Publ. Math. Debrecen*, **94**/(1-2), 21-30.
2. Nguyen Thanh Nam, Tran Tuan Nam, Nguyen Minh Tri (2019), "On cominimaxness of generalized local cohomology modules", *Journal of science Natural sciences and technology*, **16**(3), 50-57.
3. Nguyen Thanh Nam, Tran Tuan Nam, Nguyen Minh Tri (2020), "On min-max modules and generalized local cohomology with respect to a pair of ideals", *Acta Mathematica Vietnamica* (accepted).
4. Tran Tuan Nam, Nguyen Minh Tri, and Nguyen Thanh Nam (2020), "Some properties of local cohomology modules defined by a pair of ideals" (preprint).

Tài liệu tham khảo

Tiếng Anh

- [1] Abbasi A., H. Roshan-Shekalguorabi, Rasht (2014), A generalization of the finiteness problem of the local cohomology modules, *Czechoslovak Math. J.*, **64**(139) 69-78.
- [2] Aghapournahr M., Melkersson L. (2010), Finiteness properties of minimax and coatomic local cohomology modules, *Arch. Math.* **94**(6), 519-528.
- [3] Aghapournahr M., Melkersson L. (2009), *Cofiniteness and coassociated primes of local cohomology modules*, Math. Scand. **105** 161-170.
- [4] Azami. J., Naghipour R. (2009), Finiteness properties of local cohomology modules for a-minimax modules, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **137**(2), 439-448.
- [5] Amjadi J., Naghipour R. (2008), *Cohomological dimension of generalized local cohomology modules*, Algebra Colloq. **15** (2) 303-308.
- [6] Bahmanpour K. (2014), On the category of weakly Laskerian cofinite modules, *Math. Scand.*, **115**, 62-68.
- [7] Bahmanpour K., Naghipour R. (2008), On the cofiniteness of local cohomology modules, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **136**(7), 2359-2363.
- [8] Bahmanpour K., Naghipour R. (2009), Cofiniteness of local cohomology modules for ideals of small dimension, *J. Algebra*, **321**, 1997-2011.
- [9] Borna K., Sahadi p., và Yassemi S. (2011), Cofiniteness of generalized local cohomology modules, *Bull. Aust. Math. Soc.* **83**, 382-388.

- [10] Brodmann M. P. (1979), Asymptotic stability of $\text{Ass}(M/I^n M)$, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **128**(10), 2851-2853.
- [11] Brodmann M. P., Faghani A. L. (2000), A finiteness result for associated primes of local cohomology modules, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **128**(10), 2851-2853.
- [12] Brodmann M. P., Sharp R. Y. (2013), *Local cohomology: An algebraic introduction with geometric applications, 2nd edition*, Cambridge University Press.
- [13] Chu L., Tang Z. (2007), On the Artinianness of generalized local cohomology, *Comm. Algebra*, **35**, 3821-3827.
- [14] Chu L., Wang Q. (2009), Some results on local cohomology modules defined by a pair of ideals, *J. Math. Kyoto Univ.*, **49**(1), 193-200.
- [15] Chu L. (2011), *Top local cohomology modules with respect to a pair of ideals*, *Proc. Amer. Math. Soc.* **139** (13) 777-782.
- [16] N. T. Cuong, N. V. Hoang (2008), On the vanishing and the finiteness of supports of generalized local cohomology modules, *Manuscripta Math.*, **126**, 59-72.
- [17] Divaani-Aazar K. (2001), On associated and attached prime ideals of certain modules, *Colloq. Math.*, **89**(1), 147-157.
- [18] Divaani-Aazar K., Mafi A. (2005), Associated primes of local cohomology modules, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **133**(3), 655-660.
- [19] Divaani-Aazar K., Sazeedeh R., Tousi M. (2005), *On vanishing of generalized local cohomological modules*, *Algebra Colloq.* **12**:2 , 213-218.
- [20] Divaani-Aazar K., Mafi A. (2006), Associated primes of local cohomology modules of weakly Laskerian modules, *Comm. Algebra*, **34**, 681-690.
- [21] Divaani-Aazar K., Sazeedeh R. (2004), Cofiniteness of generalized local cohomology modules, *Colloq. Math.*, **99**(2), 283-290.

- [22] Faltings G.(1981), Der Endlichkeitssatz in der lokalen Kohomologie, *Math. Ann.* **255**, 45-56.
- [23] Gu Y. (2013), On the weakly Artinianness and minimax generalized local cohomology modules, *Bull. Korean Math. Soc.* **50**(6), 1855-1861.
- [24] Gu Y., Chu L. (2009), *Attached primes of the top generalized local cohomology modules*, Bull. Aust. Math. Soc. **79** 59-67.
- [25] Hajikarimi A. (2010), Local cohomology modules which are supported only at finitely many maximal ideals, *J. Korean Math. Soc.* **47**(3), 633-643.
- [26] Hartshorne R. (1970), Affine duality and cofiniteness, *Invent. Math.*, **9**, 145-164.
- [27] N. V. Hoang (2008), On the associated primes and the support of generalized local cohomology modules, *Acta Math. Vietnam.*, **33**(2), 163-171.
- [28] Huneke C. L. (1992), Problems on Local Cohomology. Free Resolutions in Commutative Algebra and Algebraic Geometry, *Res. Notes Math.*, 2. Boston, MA: Jones and Bartlett, 93–108.
- [29] Katzman K.(2002), An example of an infinite set of associated primes of a local cohomology module, *J. Algebra* **252** , 161-166.
- [30] Lorestani K. B., Sahandi P., Sharif T. (2006), A note on the associated primes of local cohomology modules, *Comm. Algebra*, **22**, 3409 - 3412.
- [31] Lorestani K. B., Sahandi P., Sharif T. (2006), A note on the associated primes of local cohomology modules, *Comm. Algebra*, **22**, 3409 - 3412.
- [32] Lorestani K. B., Sahandi P., Yassemi S.(2007), *Artinian local cohomology modules*, Canada. Math. Bull. **50**, 598-602.
- [33] Matsumura H. (1890), *Commutative algebra*, The Benjamin/Cummings Publishing Company.
- [34] Matsumura H. (1986), *Commutative ring theory*, Cambridge University Press.

- [35] Mafi A. (2006), On the associated primes of generalized local cohomology modules, *Comm. Algebra*, **34**, 2489-2494.
- [36] Macdonald I. G. (1973), *Secondary representation of modules over a commutative ring*, Sympos. Math. **11** 23-43.
- [37] Melkersson L. (1990), On asymptotic stability for sets of prime ideals connected with the powers of an ideal, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, **107**, 267-271.
- [38] T. T. Nam (2013), On the non-vanishing and the Artinianness of generalized local cohomology modules, *J. Algebra Appl.*, **12**(4), 1250203 (7 pages).
- [39] T. T. Nam, N. M. Tri (2014), Generalized ideal transforms, *Stud. Sci. Math. Hung.*, **51**(1), 67-82.
- [40] T. T. Nam, N. M. Tri, N. V. Dong (2014), Some properties of generalized local cohomology modules with respect to a pair of ideals, *Internat. J. Algebra Comput.*, **24**(7), 1043-1054.
- [41] T. T. Nam, N. M. Tri (2016), Some results on local cohomology modules with respect to a pair of ideals, *Taiwanese J. Math.*, **20**(4), 743-753.
- [42] T. T. Nam, N. M. Tri (2016), Serre subcategories and the cofiniteness of generalized local cohomology modules, *Internat. J. Algebra Comput.* **26**(6), 1267-1282.
- [43] T. T. Nam, N. M. Tri (2017), On coatomic modules and local cohomology modules with respect to a pair of ideals, *J. Korean Math. Soc.* **54**(6), 1829-1839.
- [44] T. T. Nam, N. M. Tri (2018), On the finiteness results of generalized local cohomology modules with respect to a pair of ideals, *Taiwanese J. Math.* **22**(1), pp.39.
- [45] T. T. Nam, N. M. Tri, and N. T. Nam (2019), "Some properties of local cohomology modules defined by a pair of ideals" (preprint).

- [46] N. T. Nam, T. T. Nam and N. M. Tri (2019), On cominimaxness of generalized local cohomology modules, *Journal of science Natural sciences and technology*, **16**(3), 50-57.
- [47] N. T. Nam, T. T. Nam, N. M. Tri (2020), On minimax modules and generalized local cohomology with respect to a pair of ideals, *Acta mathematica Vietnamica*, (Accepted)
- [48] Payrovi Sh., Parsa M. L. (2012), Artinianness of local cohomology modules defined by a pair of ideals, *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.*, **35**(4), 877–883.
- [49] Payrovi Sh., Parsa M. L. (2012), On the vanishing properties of local cohomology modules defined by a pair of ideals, *Eur. J. Pure Appl. Math.*, **5**(1), 55-58.
- [50] Payrovi Sh., Parsa M. L. (2013), Finiteness of local cohomology modules defined by a pair of ideals, *Comm. Algebra*, **41**, 627-637.
- [51] Pham Hung Quy (2010), On the finiteness of associated primes of local cohomology modules, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **138**(6), 1965-1968.
- [52] Rotman J. (2009), *An introduction to homological algebra*, 2nd edition, Springer.
- [53] Saremi H. (2010), Matlis duality and finiteness properties of generalized local cohomology modules, *Algebra Colloq.* **17**(4), 637-646.
- [54] Saremi H., Mafi A. (2014), On the finiteness dimension of local cohomology modules, *Algebra Colloq.* **21**(3) 517-520.
- [55] Singh A. K., Swanson I. (2004), Associated primes of local cohomology modules and of Frobenius powers, *Int. Math. Res. Not.* **33**, 1703-1733.
- [56] Singh A.K. (2000), p -torsion elements in local cohomology modules, *Math. Res. Lett.*, **7** 165-176.
- [57] Suzuki N. (1978), On the generalized local cohomology and its duality, *J. Math. Kyoto Univ. (JAKYAZ)*, **18**(1), 71-85.

- [58] Takahashi R., Yoshino Y., Yoshizawa T. (2009), Local cohomology based on a nonclosed support defined by a pair of ideals, *J. Pure Appl. Algebra*, **213**, 582-600.
- [59] Tang Z. (2012), Local-global principle for Artinianness of local cohomology modules, *Comm. Algebra*, **40**, 58-63.
- [60] Tehranian A., Talemi (2010), Cofiniteness of local cohomology based on a non-closed support defined by a pair of ideals, *Bull. Iran Math. Soc.*, **36**(2), 145-155.
- [61] N. M. Tri, T. T. Nam (2017), Ideal transforms with respect to a pair of ideals, *Acta Math. Vietnam.*, DOI: 10.1007/s40306-017-0213-4.
- [62] N. M. Tri, T. T. Nam, N. T. Nam, N. Đ. Minh (2019), On the finiteness of associated primes of local cohomology modules, *Publ. Math. Debrecen*, **94/1-2**, 21-30.
- [63] Vasconcelos W. (1974). Divisor Theory in Module Categories, North-Holland, Amsterdam.
- [64] Yassemi S., Khatami L., and Sharif T. (2002), Associated primes of generalized local cohomology modules, *Comm. Algebra*, **30**(1), 327-330.
- [65] Zamani N. (2011), Results on local cohomology of weakly Laskerian modules, *J. Algebra Appl.*, **10**(2), 303-308.
- [66] Zamani N. (2011), Generalized local cohomology relative to (I, J) , *Southeast Asian Bull. Math.*, **35**, 1045-1050.

Tiếng Pháp

- [67] Grothendieck A. (1968), *Cohomologie local des faisceaux cohérents et théorèmes de Lefschetz locaux et globaux (SGA2)*, North-Holland, Amsterdam.

Tiếng Đức

- [68] Herzog J. (1970), *Komplexe, Auflösungen und dualität in der lokalen Algebra*, Habilitationsschrift, Universität Regensburg.
- [69] Zöschinger H. (1986), Minimax moduln, *J. Algebra* **102**(1), 1-32.
- [70] Zöschinger H., Über koassozierte primideale, *Math Scand.* 63, 196-211 (1988).

Tiếng Việt

- [71] Nguyễn Minh Trí. (2017), *Luận Án Tiến Sĩ*, Trường ĐH Khoa học Tự Nhiên - ĐH Quốc gia Tp.HCM.